

Rozpad beta jądra atomu trytu.

Tryt jest atomem, w którym jądro składa się z dwóch neutronów i jednego protonu. W przybliżeniu nieskończenie ciężkiego jądra poziomy energetyczne atomu trytu są identyczne z poziomami zwykłego atomu wodoru. W chwili t_1 jeden neutron w jądrze trytu rozpada się na proton, który pozostaje w jądrze, elektron o energii mniej więcej 15 keV i antyneutrino elektronowe. Rozpad zachodzi na tyle szybko, że funkcja falowa elektronu związanego w jądrze trytu (zakładamy, że elektron był w stanie podstawowym) pozostaje nie zmieniona. Jednakże nie jest to stan dozwolony dla nowopowstałego, zjonizowanego atomu helu, gdyż ładunek elektryczny jądra helu jest równy $2e$. Oczywiście energia takiego układu jest większa od energii helu w stanie podstawowym. Celem zadania jest przedyskutowanie, co stanie się z elektronem związanym w atomie, a w szczególności, czy może on „wylecieć” jako elektron swobodny.

1 Atom wodoru - przypomnienie

Energia atomu wodoropodobnego o liczbie protonów Z i hamiltonianie

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} - \frac{Ze^2}{r} \quad (1)$$

jest dana wzorem

$$E_n = -\frac{m_e e^4 Z^2}{2\hbar^2 n^2} = -\frac{e^2 Z^2}{2a_0 n^2}, \quad a_0 = \frac{\hbar^2}{m_e e^2}, \quad (2)$$

gdzie stała $a_0 = 5,29 \times 10^{-9}$ cm ($1/2 \times 10^{-8}$ cm) często nazywana jest średnim promieniem orbity atomu wodoru (promieniem Bohra). Jednakże na prawdę, jest to wartość średnia $1/r$ w stanie podstawowym

$$\frac{1}{a_0} = \left\langle \psi_1 \left| \frac{1}{r} \right| \psi_1 \right\rangle. \quad (3)$$

Unormowana funkcja stanu podstawowego ma postać

$$\psi_1 = \psi_{l=0,m=0}^{n=1} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \left(\frac{Z}{a_0} \right)^{3/2} 2 \exp \left(-\frac{Zr}{a_0} \right). \quad (4)$$

Mamy zatem

$$\left\langle \frac{1}{r} \right\rangle_{n=1} = \int d\Omega \int_0^\infty dr r^2 \frac{1}{r} |\psi_{l=0,m=0}^{n=1}|^2 = 4 \left(\frac{Z}{a_0} \right)^3 \left(\frac{a_0}{2Z} \right)^2 \int_0^\infty d\rho \rho e^{-\rho} = \frac{Z}{a_0}. \quad (5)$$

Powyżej podaliśmy wartość a_0 , ale warto przypomnieć efektywny sposób obliczania wartości numerycznych różnych wielkości przy użyciu przelicznika

$$\hbar c = 197.327053(59) \text{ MeV fm} = 197.3 \dots \times 10^{-13} \text{ MeV cm} \quad (6)$$

oraz wartości ładunku elementarnego w jednostkach naturalnych

$$e^2 \simeq \frac{1}{137} \hbar c. \quad (7)$$

Masa elektronu wynosi w jednostkach naturalnych

$$m_e c^2 = 0.511 \quad \text{MeV}. \quad (8)$$

Stąd

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{m_e e^2} = \frac{\hbar^2 c^2}{m_e c^2} \frac{137}{\hbar c} = 137 \frac{\hbar c}{m_e c^2} = 137 \frac{197}{0.511} \times 10^{-13} \text{ [cm]} = 5,29 \times 10^{-9} \text{ [cm]}. \quad (9)$$

Analogicznie, energię stanu podstawowego obliczamy jak następuje

$$E_1^{H_2} = -\frac{e^2}{2a_0} = -\frac{1}{137} \frac{\hbar c}{2a_0} = -\frac{1}{137} \frac{197}{10.22} \frac{10^{-13}}{10^{-9}} 10^6 = -14 \text{ [eV]}. \quad (10)$$

Ostatni czynnik 10^6 we wzorze (10) to przeliczenie megaelektronowoltów na elektronowolty. Wynik dokładny (bez przybliżeń numerycznych, które dokonaliśmy, to -13.6 eV).

2 Rozpad trytu

Po rozpadzie jednego neutronu hamiltonian (1) zamienia się w

$$\hat{H}_2 = \frac{\hat{p}^2}{2m} - \frac{2e^2}{r} = \hat{H} - \frac{e^2}{r}. \quad (11)$$

W związku z tym energia elektronu po rozpadzie jest dana poprzez średnią

$$\begin{aligned} \bar{E} &= \langle \psi_1 | \hat{H}_2 | \psi_1 \rangle \\ &= \langle \psi_1 | \hat{H} | \psi_1 \rangle - e^2 \left\langle \psi_1 \left| \frac{1}{r} \right| \psi_1 \right\rangle \\ &= E_1^{H_2} - \frac{e^2}{a_0} = 3E_1^{H_2} = -40.8 \text{ [eV]}, \end{aligned} \quad (12)$$

gdzie użyliśmy relacji: $-e^2/a_0 = 2E_1^{H_2}$. Wartości energii dla zjonizowanego atomu helu wynoszą odpowiednio (w elektronowoltach)

$$\begin{aligned} E_n^{He} &= 4E_n^{H_2}, \\ E_1^{He} &= -54.4, \\ E_2^{He} &= -13.6. \end{aligned} \quad (13)$$

A zatem średnia wartość hamiltonianu helu w stanie $|\psi_1\rangle$ jest większa niż prawdziwa energia stanu podstawowego helu i mniejsza od energii pierwszego stanu wzbudzonego.

Oznaczmy funkcję stanu podstawowego helu ($Z = 2$ we wzorze (4)) przez $|\varphi_1\rangle$. Obliczymy teraz amplitudę prawdopodobieństwa

$$\langle\varphi_1|\psi_1\rangle = \frac{2^{3/2}}{\pi} \left(\frac{1}{a_0}\right)^3 4\pi \int_0^\infty dr r^2 \exp\left(-\frac{3r}{a_0}\right) \quad (14)$$

podstawiając

$$r = \frac{a_0}{3}\rho \quad (15)$$

co daje

$$\begin{aligned} \langle\varphi_1|\psi_1\rangle &= 8\sqrt{2} \left(\frac{1}{a_0} \frac{a_0}{3}\right)^3 \underbrace{\int_0^\infty d\rho \rho^2 e^{-\rho}}_{=2!} \\ &= \frac{16\sqrt{2}}{27} = 0.838. \end{aligned} \quad (16)$$

Zatem prawdopodobieństwo, że po rozpadzie beta układ będzie w stanie podstawowym zjonizowanego atomu helu wynosi

$$p_1 = |\langle\varphi_1|\psi_1\rangle|^2 = 0.702. \quad (17)$$

Przyczynek do $\bar{E}$ (12) od stanu podstawowego wynosi zatem

$$\bar{E}_1 = p_1 E_1^{He} = -38.19 \quad [\text{eV}]. \quad (18)$$

Numerycznie obliczono, że

$$p_2 = \frac{1}{4}, \quad \sum_{n=3}^\infty p_n = 0.02137 \quad (19)$$

oraz

$$\sum_{n=3}^\infty p_n \frac{1}{n^2} = 0.00177. \quad (20)$$

Mając te dane możemy obliczyć całkowite prawdopodobieństwo, że po rozpadzie beta elektron będzie w jakimkolwiek stanie związanym jonu helu

$$p_{zw} = p_1 + p_2 + \sum_{n=3}^\infty p_n = 0.974. \quad (21)$$

To oznacza, że prawdopodobieństwo, iż elektron „wyleci” wynosi

$$p_{wyl} = 1 - p_{zw} = 0.026 \quad (22)$$

czyli 2.6%. Średnia energia pochodząca od stanów związanych wynosi

$$\bar{E}_{zw} = \bar{E}_1 + p_2 E_2^{He} + E_1^{He} \sum_{n=3}^{\infty} p_n \frac{1}{n^2} \simeq -41.7 \quad [\text{eV}]. \quad (23)$$

Jest to mniej niż $\bar{E} = -40.8$ (12) o 0.9 eV. Możemy zatem obliczyć całkowitą energię E_{wyl} elektronu, który wyleci z układu ze wzoru

$$p_{\text{wyl}} E_{\text{wyl}} = \bar{E} - \bar{E}_{zw} \quad \rightarrow \quad E_{\text{wyl}} = \frac{\bar{E} - \bar{E}_{zw}}{p_{\text{wyl}}} = \frac{0.9}{0.026} = 34.6 \quad [\text{eV}]. \quad (24)$$

3 Komentarz

Pomiary rozkładu energii elektronu wyemitowanego przez jądro trytu (to nie jest elektron z orbity atomu trytu!) są obecnie prowadzone w celu zmierzenia masy neutrina. Na początku XXI wieku były prowadzone dwa takie eksperymenty: tzw. Mainz i Troitsk (od nazw miast, gdzie je prowadzono). Obecnie eksperyment Katrin (Karlsruhe Tritium Neutrino Experiment) dostarczył nowe ograniczenie na masę (anty)neutrina elektronowego $m_{\nu_e} < 0.8$ eV. Planowane są też nowe eksperymenty.

Bilans energetyczny rozpadu trytu przujmuje (naiwnie) postać

$$M_{3H} = M_{3He} + E_{\nu} + E_e,$$

gdzie $M_{3H, 3He}$ to masy jądra trytu i helu 3, a $E_{\nu, e}$ to energie neutrina i elektronu. Jądro trytu różni się od jądra helu zamianą neutronu na proton, co daje różnicę energii

$$m_n - m_p = 939.565 - 938.272 = 1.293 \quad [\text{MeV}]. \quad (25)$$

Energia kinetyczna elektronu Q wynosi zatem

$$Q = m_n - m_p - m_e = 782 \quad [\text{MeV}]. \quad (26)$$

Oszacowanie to jest jednak zbyt naiwne, gdyż nie bierze pod uwagę energii wiązania jąder. Rzeczywiście, masy jąder trytu i helu wynoszą odpowiednio¹

$$\begin{aligned} M_{3H} &= 2808.9211 \quad [\text{MeV}], \\ M_{3He} &= 2808.3916 \quad [\text{MeV}], \end{aligned} \quad (27)$$

co daje energię kinetyczną elektronu

$$Q = M_{3H} - M_{3He} - m_e = 18.5 \quad [\text{keV}]. \quad (28)$$

Gdyby rozpad trytu był dwuciałowy to elektrony z rozpadu miałyby zawsze jedną energię rzędu 18.5 keV. Ponieważ rozpad jest trzyciałowy, energia kinetyczna elektronu może być mniejsza o energię uniesioną przez neutrina. Stąd obserwujemy ciągły rozkład Q .

¹<https://www.osti.gov/servlets/purl/1545591>

Ponieważ, masa neutrina jest bardzo mała, mniejsza niż energie wiązania elektronu w atomie trytu i helu, w celu dokładnego pomiaru masy neutrina musimy uwzględnić efekty atomowe dyskutowane w ramach tego zadania. Niestety, w doświadczeniach używa się cząsteczek trytu, których funkcje falowe nie są tak dobrze znane jak funkcje falowe atomów.

na podstawie J.-L. Basdevant, L. Dalibard *The Quantum Mechanics Solver*