Problem trójciałowy

Przedmiotem tego zadania jest wyprowadzenie ścisłych wyników dla problemu trójciałowego w mechanice kwantowej. Jak wiadomo, problem trójciałowy w mechanice klasycznej uważany jest za bardzo trudny, dokładne rozwiązania podał Henri Poincare. Tu będziemy starali się wyprowadzić *dolne* ograniczenia na energię stanu podstawowego. *Górne* ograniczenia można dość łatwo dostać z zasady wariacyjnej.

1 Redukcja hamiltonianu dwuciałowego

Rozważmy najpierw problem dwuciałowy dla cząstek o równych masach m

$$H_{12} = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2m} + V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|), \tag{1}$$

gdzie potencjał zależy tylko od względnej odległości. Hamiltonian ten można łatwo rozseparować przy pomocy identyczności

$$(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 + (\vec{p}_1 - \vec{p}_2)^2 = 2(p_1^2 + p_2^2)\,, \tag{2}$$

co daje

$$H_{12} = \frac{(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2}{4m} + \frac{(\vec{p}_1 - \vec{p}_2)^2}{4m} + V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|). \tag{3}$$

Zdefiniujmy pęd całkowity $\vec{P}$ i pęd ruchu względnego $\vec{p}$

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2, \quad \vec{p} = \frac{1}{2}(\vec{p}_1 - \vec{p}_2)\,. \tag{4}$$

Wówczas

$$H = \frac{P^2}{2M} + \frac{p^2}{2\mu} + V(r), \tag{5}$$

gdzie $M = 2m$ jest całkowitą masą obu cząstek,

$$\mu = \frac{m}{2} \tag{6}$$

jest masą zredukowaną a $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ jest względną odległością cząstek 1 i 2.

Aby zrozumieć, dlaczego względny pęd (4) zdefiniowany jest z czynnikiem $1/2$ należy przeprowadzić separację dla dwóch cząstek o różnych masach. Najwygodnie jest to zrobić zauważając, że ruch układu jako całości musi być opisywany hamiltonianem $P^2/2M$, gdzie

$M = m_1 + m_2$. Obliczmy zatem różnicę ΔH

$$
\begin{aligned}
\Delta H &= \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} - \frac{(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2}{2(m_1+m_2)} \\
&= \frac{1}{2m_1 m_2 (m_1+m_2)} \left[(m_1+m_2)\left(m_2 p_1^2 + m_1 p_2^2\right) - m_1 m_2 \left(p_1^2 + p_2^2 + 2\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2\right)\right] \\
&= \frac{m_2^2 p_1^2 + m_1^2 p_2^2 - 2 m_1 m_2 \, \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2}{2 m_1 m_2 (m_1+m_2)} \\
&= \frac{1}{2\, m_1 m_2/(m_1+m_2)} \left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{p}_1 - \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{p}_2\right)^2 . \qquad (7)
\end{aligned}
$$

Hamiltonian (7) odpowiada członowi kinetycznemu cząstki o masie zredukowanej $\mu = m_1 m_2/(m_1+m_2)$ i pędzie

$$
\vec{p}_{12} = \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{p}_1 - \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{p}_2. \qquad (8)
$$

Dla $m_1 = m_2$ mamy $\mu = m/2$ oraz $\vec{p}_{12} = (\vec{p}_1 - \vec{p}_2)/2$, a dla np. $m_2 \to \infty$ (atom wodoru) dostajemy $\mu \to m$ oraz $\vec{p}_{12} \to \vec{p}_1$.

Obliczmy teraz reguły komutacji

$$
\begin{aligned}
\left[r^a, p_{12}^\beta\right] &= \frac{1}{m_1+m_2}\left[r_1^\alpha - r_2^\alpha, m_2 p_1^\beta - m_1 p_2^\beta\right] \\
&= \frac{1}{m_1+m_2}\left\{m_2\left[r_1^\alpha, p_1^\beta\right] + m_2\left[r_2^\alpha, p_2^\beta\right]\right\} \\
&= i\delta^{\alpha\beta}. \qquad (9)
\end{aligned}
$$

2 Redukcja hamiltonianu trójciałowego

Rozważmy teraz hamiltonian trzech cząstek o równych masach

$$
H_{123} = \frac{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}{2m} + V(r_{12}) + V(r_{23}) + V(r_{13}). \qquad (10)
$$

Przeprowadzimy teraz redukcję członu kinetycznego analogicznie do (2) posługując się tożsamością

$$
(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3)^2 + (\vec{p}_1 - \vec{p}_2)^2 + (\vec{p}_2 - \vec{p}_3)^2 + (\vec{p}_3 - \vec{p}_1)^2 = 3\left(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2\right). \qquad (11)
$$

Mamy zatem

$$\begin{aligned}
H_{123} &= \frac{(\vec{p}_1+\vec{p}_2+\vec{p}_3)^2}{6m} + \left[\frac{4p_{12}^2}{6m} + V(r_{12})\right] + \left[\frac{4p_{23}^2}{6m} + V(r_{23})\right] + \left[\frac{4p_{13}^2}{6m} + V(r_{13})\right] \\
&= \frac{P^2}{2M} + \sum_{j>i=1}^{3} \left(\frac{p_{ij}^2}{2\mu'} + V_{ij}\right) \\
&= \frac{P^2}{2M} + \sum_{j>i=1}^{3} H_{ij}(\mu'), \qquad (12)
\end{aligned}$$

gdzie $M = 3m$ jest całkowitą masą układu, $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3$ jest całkowitym pędem, $V_{ij} = V(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$, $\vec{p}_{ij} = (\vec{p}_i - \vec{p}_j)/2$ oraz nowa masa zredukowana

$$\mu' = \frac{3}{4}m = \frac{3}{2}\mu. \qquad (13)$$

3 Zasada wariacyjna dla problemu trójciałowego

Oczywiście hamiltoniany H_{ij} nie komutują. Gdyby komutowały, to $E^{(3)} = E_{123}$ byłaby sumą $E_{ij}^{(2)}$. Aby oszacować $E^{(3)}$ pozsłuzymy się zasadą wariacyjną. Oznaczmy stan podstawowy hamiltonianu H_{123} przez $|\Omega\rangle$. Nie jest to stan podstawowy dla każdego H_{ij} z osobna. Obserwacja ta prowadzi do ograniczenia na energię stanu podstawowego hamiltonianu trójciałowego:

$$E^{(3)} = \langle\Omega|\, H_{123}\, |\Omega\rangle = \sum_{j>i=1}^{3} \langle\Omega|\, H_{ij}(\mu')\, |\Omega\rangle \geqslant 3E^{(2)}(\mu'). \qquad (14)$$

Ostatnia nierówność wynika z faktu, że średnia z H_{ij} w stanie $|\Omega\rangle$ jest większa lub równa energii stanu podstawowego podsystemu dwuciałowego o masie zredukowanej μ'.

Wzór (14) można zastosować tylko w przypadku gdy oddziaływania dwuciałowe są takie same dla wszystkich cząstek i przyciągające (aby istniał stan związany). Przykładem takich oddziaływań są oddziaływania silne między kwarkami.

Rozważmy teraz dwa przykładowe potencjały dwuciałowe: potencjał Coulomba i potencjał oscylatora harmonicznego

$$V_C = -\frac{b}{r},\ V_O = \frac{\kappa}{2}r^2. \qquad (15)$$

Ponieważ znamy rozwiązania dla atomu wodoru i dla oscylatora, możemy dla obu tych przypadków napisać wzór na energię stanu podstawowego. W przypadku potencjału coulombowskiego musimy zastąpić $e \to b$

$$E_C^{(2)}(\mu) = -\frac{\mu b^4}{2\hbar^2}, \qquad (16)$$

a w przypadku oscylatora $\mu\omega^2 \to \kappa$, skąd otrzymujemy (oscylator jest trójwymiarowy)

$$E_O^{(2)}(\mu) = \frac{3}{2}\hbar\sqrt{\frac{\kappa}{\mu}}. \tag{17}$$

W przypadku problemu trójciałowego, musimy dla oszacowania energii użyć nowej masy zredukowanej μ' (13), co daje

$$E^{(3)} \geqslant -\frac{9}{8}\frac{mb^4}{\hbar^2} \tag{18}$$

w przypadku oddziaływania coulombowskiego, a w przypadku oscylatora

$$E^{(3)} \geqslant 3\sqrt{3}\hbar\sqrt{\frac{\kappa}{m}}. \tag{19}$$

4 Dokładne rozwiązanie oscylatorowe

W przypadku potencjału harmonicznego problem trójciałowy dla równych mas można rozwiązać dokładnie przy pomocy zmiennych Jacobiego. Zdefiniujmy

$$\begin{aligned}
\vec{R}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right), \; \vec{R}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(2\vec{r}_3 - \vec{r}_1 - \vec{r}_2\right), \; \vec{R}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3\right), \\
\vec{Q}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{p}_1 - \vec{p}_2\right), \; \vec{Q}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(2\vec{p}_3 - \vec{p}_1 - \vec{p}_2\right), \; \vec{Q}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3\right).
\end{aligned} \tag{20}$$

Pokażemy, że tak zdefiniowane kombinacje liniowe spełniają kanoniczne relacje komutacji. Wyjdziemy od relacji ($\hbar = 1$)

$$\left[r_i^\alpha, p_j^\beta\right] = i\delta^{\alpha\beta}\delta_{ij}. \tag{21}$$

Indeksy $i, j, \ldots$ numerują cząstki, a indeksy $\alpha, \beta, \ldots$ składowe położenia i pędu określonej cząstki. Obliczmy przykładowo kilka komutatorów

$$\begin{aligned}
\left[R_1^\alpha, Q_1^\beta\right] &= \frac{1}{2}\left[r_1^\alpha - r_2^\alpha, p_1^\beta - p_2^\beta\right] \\
&= \frac{1}{2}\left\{\left[r_1^\alpha, p_1^\beta\right] + \left[r_2^\alpha, p_2^\beta\right]\right\} = i\delta^{\alpha\beta}.
\end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
\left[R_1^\alpha, Q_2^\beta\right] &= \frac{1}{2\sqrt{3}}\left[r_1^\alpha - r_2^\alpha, 2p_3^\beta - p_1^\beta - p_2^\beta\right] \\
&= \frac{1}{2\sqrt{3}}\left\{-\left[r_1^\alpha, p_1^\beta\right] + \left[r_2^\alpha, p_2^\beta\right]\right\} = 0.
\end{aligned} \tag{23}$$

Analogicznie znika $\left[R_1^\alpha, Q_3^\beta\right]$ gdyż położenia cząstek $1, 2$ mają znaki przeciwne, a ich pedy takie same. Dalej

$$\begin{aligned}
\left[R_2^\alpha, Q_2^\beta\right] &= \frac{1}{6}\left[2r_3^\alpha - r_1^\alpha - r_2^\alpha, 2p_3^\beta - p_1^\beta - p_2^\beta\right] \\
&= \frac{1}{6}\left\{4\left[r_2^\alpha, p_3^\beta\right] + \left[r_1^\alpha, p_1^\beta\right] + \left[r_2^\alpha, p_2^\beta\right]\right\} = i\delta^{\alpha\beta}.
\end{aligned} \tag{24}$$

Genralnie mamy

$$\left[R_i^\alpha, Q_j^\beta\right] = i\delta^{\alpha\beta}\delta_{ij}. \tag{25}$$

Teraz naszym celem jest przepisanie hamiltonianu (10) z potencjałem harmonicznym (15) w zmiennych Jacobiego (20). W tym celu udowodnimy dwie tożsamości

$$\begin{aligned}
R_1^2 + R_2^2 &= \frac{1}{2}\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right)^2 + \frac{1}{6}\left(2\vec{r}_3 - \vec{r}_1 - \vec{r}_2\right)^2 \\
&= \frac{1}{2}r_1^2 + \frac{1}{2}r_2^2 - \vec{r}_1\cdot\vec{r}_2 \\
&\quad + \frac{2}{3}r_3^2 + \frac{1}{6}r_1^2 + \frac{1}{6}r_2^2 - \frac{2}{3}\vec{r}_1\cdot\vec{r}_3 - \frac{2}{3}\vec{r}_2\cdot\vec{r}_3 + \frac{1}{3}\vec{r}_1\cdot\vec{r}_2 \\
&= \frac{2}{3}(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 - \vec{r}_1\cdot\vec{r}_2 - \vec{r}_1\cdot\vec{r}_3 - \vec{r}_2\cdot\vec{r}_3) \\
&= \frac{1}{3}\left((\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2 + (\vec{r}_1 - \vec{r}_3)^2 + (\vec{r}_2 - \vec{r}_3)^2\right).
\end{aligned} \tag{26}$$

Ponieważ analogiczny wzór stosuje się dla zmiennych Q_i, skorzystamy z 4 linijki wzoru (26) i dodamy Q_3^2

$$\begin{aligned}
Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2 &= \frac{2}{3}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - \vec{p}_1\cdot\vec{p}_2 - \vec{p}_1\cdot\vec{p}_3 - \vec{p}_2\cdot\vec{p}_3) \\
&\quad + \frac{1}{3}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + 2\vec{p}_1\cdot\vec{p}_2 + 2\vec{p}_1\cdot\vec{p}_3 + 2\vec{p}_2\cdot\vec{p}_3) \\
&= p_1^2 + p_2^2 + p_3^2.
\end{aligned} \tag{27}$$

Zatem hamiltonian (10) przyjmuje postać

$$\begin{aligned}
H_{123} &= \frac{Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2}{2m} + \frac{\kappa}{2}3\left(R_1^2 + R_2^2\right) \\
&= \frac{Q_3^2}{2m} + \left[\frac{Q_1^2}{2m} + \frac{3\kappa}{2}R_1^2\right] + \left[\frac{Q_2^2}{2m} + \frac{3\kappa}{2}R_2^2\right].
\end{aligned}$$

Jest to system złożony z ruchu środka masy w zmiennnej 3 oraz z dwóch trójwymiarowych oscylatorów harmonicznych w zmiennych 1 i 2, o częstości ω, którą wyliczmy ze wzoru

$$\frac{1}{2}m\omega^2 = 3\frac{\kappa}{2} \;\rightarrow\; \omega = \sqrt{\frac{3\kappa}{m}}. \tag{28}$$

Zatem dokładna energia stanu podstawowego wynosi

$$E^{(3)} = 2\frac{3}{2}\hbar\omega = 3\sqrt{3}\sqrt{\frac{\kappa}{m}}. \tag{29}$$

Widzimy zatem, że jest to dokładnie ta sama energia, którą otrzymaliśmy metodą wariacyjną (19). Zatem oszacowanie wariacyjne jest w tym przypadku wysycone. Jest to własność potencjału harmonicznego i nie ma miejsca dla innych potencjałów.

Na koniec rozpiszmy hamiltonian środka masy

$$H_{\mathrm{cm}} = \frac{Q_3^2}{2m} = \frac{(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3)^2}{6m} \tag{30}$$

co zgadza się z pierwszą linijką wzoru (12).

5 Oddzialywania między kwarkami

Do opisu stanu związanego kwarków należałoby stosować formalizm kwantowej teorii pola, gdzie oddziaływanie zachodzi poprzez wymianę gluonów (w elektrodynamice poprzez wymianę fotonów). Jednakże dla kwarków ciężkich można zastosować przybliżenie nierelatywistyczne. W tym celu trzeba zaproponować (znać) potencjał oddziaływania. W przypadku oddziaływań silnych odpowiednie ładunki (zwane ładunkami kolorowymi) nie są – tak jak w elektrodynamice – liczbami ale macierzami. Stąd potencjał oddziaływania coulombowskiego dwóch ładunków $e_{1,2}$ należy zastąpić przez

$$V = \frac{e_1 e_2}{r} \to W = \vec{T}^{(1)} \cdot \vec{T}^{(2)}\, V(r). \tag{31}$$

Wiadomo, ze funkcja $V(r)$ jest linowa dla dużych r (uwięzienie kwarków, tzw. *confinement*) i coulombowska dla małych r.

Macierze $\vec{T}^{(1,2)}$ są generatorami grupy SU(3) w reprezentacji fundamentalnej odpowiednio dla kwarku nr 1 i nr 2. Warto przypomnieć, że dla grupy SU(2) generatorami w reprezentacji fundamentalnej są trzy macierze Pauliego, $\vec{T} = 1/2\,\vec{\sigma}$, a dla grupy SU(3) jest to osiem $(N^2 - 1)$ macierzy Gell-Manna. Macierze te spełniają reguły komutacji

$$[T_i, T_j] = i f_{ijk} T_k, \tag{32}$$

gdzie stałe f_{ijk} są rzeczywiste i całkowicie antysymetryczne. Dla grupy SU(3) macierze T_i mają wymiar 3×3, dla grupy SU(2) oczywiście 2×2 a stałe $f_{ijk} = \varepsilon_{ijk}$.

Warto zauważyć, że sprzęgając w sposób zespolony relację (32) otrzymujemy

$$\left[-T_i^*, -T_j^*\right] = i f_{ijk}(-T_k^*). \tag{33}$$

Zatem macierze $-T_i^*$ spełniają tę samą relację komutacji co macierze T_i. Oznacza to, ze w rzeczywistości mamy dwie reprezentacje „fundamentalne". Dla grupy SU(2) istnieje taka macierz U, że

$$-T_i^* = U T_i U^\dagger, \tag{34}$$

a zatem reprezentacje te są unitarnie równoważne. Dla grup SU$(N > 2)$ taka macierz U nie iestnieje i reprezentacja fundamentalna T_i oraz reprezentacja do niej sprzężona $-T_i^*$ nie są równoważne.

W przypadku grupy SU(2) reprezentacje numerujemy przy pomocy wartości liczby kwantowej $j = 0, 1/2, 1, 3/2\ldots$ lub prz pomocy wymiaru (liczby stanów) $d_j = 2j + 1$, czy wreszcie przy pomocy wartości operatora Casimira

$$C_j = \sum_i T_i^2 = j(j+1)\mathbf{1}. \tag{35}$$

Dla uproszczenia będziemy opuszczali trywialną macierz jednostkową **1**.

W przypadku grupy SU(3) przyjęło się oznaczać reprezentację przy pomocy wymiaru i znaku sprzężenia dla reprezentacji sprzężonej. W rozważanym przez nas przypadku kwarki należą do reprezentacji 3 a antykwarki do reprezentacji $\bar{3}$.

Wartość iloczynu $\vec{T}^{(1)} \cdot \vec{T}^{(2)}$ we wzorze (31) zależy od tego, na jaką reprezentację złożymy dwie reprezentacje, do których należą cząstki (1) i (2). Przypomnijmy sobie, że dla grupy SU(2) dwie reprezentacje fundamentalne $j_{1,2} = 1/2$ mogą się złożyć na całkowite $j = 0$ (singlet) i $j = 1$ (tryplet). W przypadku grupy SU(3) składanie reprezentacji najlepiej wykonać przy pomocy tzw. diagramów Younga. Tutaj przytoczymy tylko wynik:

$$\begin{aligned} 3 \otimes \bar{3} &= 1 \oplus 8, \\ 3 \otimes 3 &= \bar{3} \oplus 6. \end{aligned} \tag{36}$$

Ponieważ cząstki fizyczne złożone z kwarków mają całkowity ładunek kolorowy 0 (tak jak atomy nie mają ładunku elektrycznego), czyli są singletami, czyli należą do reprezentacji 1. Zatem widzimy, że w najprostszym przypadku mamy dwie możliwości. Albo mamy cząstki złożone z kwarka i antykwarka, albo z dwóch kwarków w stanie $\bar{3}$, do którego dorzucamy trzeci kwark i składamy całość na singlet. Pierwsze to mezony ($q\bar{q}$), drugie to bariony (qqq).

Aby wyliczyć iloczyn $\vec{T}^{(1)} \cdot \vec{T}^{(2)}$ musimy określić do jakiej reprezentacji należy całkowity „kolor" $\vec{T} = \vec{T}^{(1)} + \vec{T}^{(2)}$. W tym celu zauważmy że:

$$\begin{aligned} \vec{T}^{\,2} &= \sum_i T_i^2 = C_F \text{ jeżeli } \vec{T} \in 3 \text{ lub } \bar{3}, \\ \vec{T}^{\,2} &= \sum_i T_i^2 = 0 \text{ jeżeli } \vec{T} \in 1. \end{aligned} \tag{37}$$

Zatem dla oddziaływania kwark-antykwark w mezonie, gdzie całkowite $\vec{T} \in 1$ mamy

$$\vec{T}^{\,2} = \left(\vec{T}^{(1)} + \vec{T}^{(2)}\right)^2 = \underbrace{\left(\vec{T}^{(1)}\right)^2}_{=C_F} + \underbrace{\left(\vec{T}^{(2)}\right)^2}_{=C_F} + 2\vec{T}^{(1)} \cdot \vec{T}^{(2)} = 0 \tag{38}$$

i dalej

$$\vec{T}^{(1)} \cdot \vec{T}^{(2)} = -C_F. \tag{39}$$

Dla dwóch kwarków, które składają się na $\bar{3}$ (a więc dwóch kwarków w barionie) mamy

$$\vec{T}^{\,2} = \left(\vec{T}^{(1)} + \vec{T}^{(2)}\right)^2 = \underbrace{\left(\vec{T}^{(1)}\right)^2}_{=C_F} + \underbrace{\left(\vec{T}^{(1)}\right)^{2^2}}_{=C_F} + 2\vec{T}^{(1)} \cdot \vec{T}^{(2)} = C_F \tag{40}$$

i dalej

$$\vec{T}^{(1)} \cdot \vec{T}^{(2)} = -\frac{1}{2}C_F. \tag{41}$$

A zatem mamy, że

$$W_{qq} = \frac{1}{2} W_{q\bar{q}}. \tag{42}$$

Oddziaływanie kwark-antykwark w mezonie jest dwa razy silniejsze niż oddziaływanie kwark-kwark w barionie.

Dygresja

Zauważmy, że powyższe rozważania przeprowadziliśmy bez znajomości wartości numerycznej C_F. Znając wartości numeryczne operatorów Casimira dla pozostałych reprezentacji R możemy znaleźć wartości numeryczne iloczynu $\vec{T}^{(1)} \cdot \vec{T}^{(2)}$ dla sumarycznego koloru 8 i 6. Mamy

$$C_1 = 0,\ C_F \stackrel{\text{def.}}{=} C_3 = C_{\bar{3}} = \frac{4}{3},\ C_6 = \frac{10}{3},\ C_A \stackrel{\text{def.}}{=} C_8 = 3. \tag{43}$$

Proszę sprawdzić, że

$$\left.\vec{T}^{(1)} \cdot \vec{T}^{(2)}\right|_6 = \frac{1}{3},\ \left.\vec{T}^{(1)} \cdot \vec{T}^{(2)}\right|_8 = \frac{1}{6}. \tag{44}$$

Jak widać, iloczyny te są dodatnie (w przeciwieństwie do przypadku, gdzie sumaryczny kolor jest singletem lub antytrójką), a zatem oddziaływanie w tych kanałach jest odpychające.

6 Zasada wariacyjna dla barionu

Wyprowadzona w poprzednim paragrafie relacja (42) pozwala powiązać oszacowania mas barionów i mezonów. A priori mogłoby być to niemożliwe, gdyż W_{qq} i $W_{q\bar{q}}$ mogły by być zupełnie inne. Dla barionu mamy zatem

$$\begin{aligned} H_{123} &= \sum_{j>i=1}^{3} \left(\frac{p_{ij}^2}{2\mu'} + W_{qq}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) \right) = \sum_{j>i=1}^{3} \left(\frac{p_{ij}^2}{2\mu'} + \frac{1}{2} W_{q\bar{q}}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j>i=1}^{3} \left(\frac{p_{ij}^2}{2\mu''} + W_{q\bar{q}}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) \right), \end{aligned} \tag{45}$$

gdzie

$$\mu'' = \frac{1}{2}\mu' = \frac{3}{4}\mu = \frac{3}{8} m\,.$$

Do hamiltonianu

$$\sum_{j>i=1}^{3} \left(\frac{p_{ij}^2}{2\mu''} + W_{q\bar{q}}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) \right)$$

możemy teraz zastosować wzór (31), co pozwala nam oszacować energię barionu złożonego z trzech kwarków o masie m:

$$E^{(3)} \geqslant \frac{3}{2} E^{(2)}(\mu''). \tag{46}$$

Powstaje pytanie, jak powiązać $E^{(2)}(\mu'')$ z masą mezonu złożonego z takiego samego kwarka i jego antycząstki, gdyż w odpowiadającym mu systemie dwuciałowym znamy energię $E^{(2)}(\mu)$, a więc przy innej masie zredukowanej.

W przypadku ogólnego potencjału $V(r)$ we wzorze (31) wymagałoby to obliczeń numerycznych. Jednakże dobrym przybliżeniem może być użycie potencjału logarytmicznego, który ma własność (obserwowaną eksperymentalnie dla mezonów zbudowanych z ciężkich kwarków), że odległości pomiędzy poziomami o ustalonych liczbach kwantowych nie zależą od masy. Można to wykazać przeskalowując $\vec{r} \to \alpha\vec{r}$ i $\vec{p} \to \vec{p}/\alpha$ (zauważmy, że przeskalowanie $\vec{r}$ oznacza *de facto* zmianę jednostki wymiarowej długości, co nie wpływa na wartość energii):

$$H = \frac{p^2}{2\mu''} + g\ln\left(\frac{r}{r_0}\right) = \frac{p^2}{2\underbrace{\alpha^2\mu''}_{=\mu}} + g\ln\left(\frac{r}{r_0}\right) + g\ln\alpha\,, \tag{47}$$

co daje

$$\alpha = \sqrt{\frac{\mu}{\mu''}} \tag{48}$$

Widzimy, ze energie Hamiltonianów

$$\frac{p^2}{2\mu''} + g\ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \text{ oraz } \frac{p^2}{2\mu} + g\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)$$

różnią się o stałą $g\ln\alpha = g\ln\sqrt{\mu/\mu''}$, a więc odległości pomiędzy poziomami energetycznymi są takie same.

Aby powiązać $E^{(2)}$ z energią mezonu musimy przyjąć, że $\mu = m/2$ (patrz (6)). Z kolei $\mu'' = \mu'/2 = 3m/8$ (patrz (13)). Zatem

$$E^{(2)}(\mu'') = E^{(2)}(\mu) + g\frac{1}{2}\ln\frac{\mu}{\mu''} = E^{(2)}(\mu) + g\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}. \tag{49}$$

Masę cząstki złożonej z n oddziaływujących cząstek o masie m każda, wyliczamy ze wzoru Einsteina w przyblizeniu nierelatywistycznym:

$$M_n = nm + \frac{E^{(n)}}{c^2}. \tag{50}$$

Dobrym przykładem jest tu barion Ω złożony z trzech kwarków s oraz mezon φ złożony z kwarka s i antykwarka $\bar{s}$:

$$M_\Omega = 3m_s + \frac{E^{(3)}}{c^2},\ m_\varphi = 2m_s + \frac{E^{(2)}(\mu)}{c^2}. \tag{51}$$

Mamy teraz przy użyciu (46)

$$
\begin{aligned}
M_\Omega &\geqslant 3m_s + \frac{3}{2}\frac{E^{(2)}(\mu'')}{c^2} \\
&= 3m_s + \frac{3}{2}\frac{E^{(2)}(\mu)}{c^2} + \frac{3}{4}\frac{g}{c^2}\ln\frac{4}{3} \\
&= \frac{3}{2}\left(2m_s + \frac{E^{(2)}(\mu)}{c^2}\right) + \frac{3}{4}\frac{g}{c^2}\ln\frac{4}{3},
\end{aligned}
\tag{52}
$$

co daje w ostateczności

$$
M_\Omega \geqslant \frac{3}{2}m_\varphi + \frac{3}{4}\frac{g}{c^2}\ln\frac{4}{3}. \tag{53}
$$

W pracy z roku 1977 o ciężkich kwarkach Rosner i Quigg, badając rozszczepienia mezonów $c\bar{c}$ i $b\bar{b}$ (a więc nie biorąc pod uwagę mas barionów) oszacowali, że $g/c^2 \sim 750$ MeV. Ile powinno wynosić g/c^2 aby w równaniu (53) była równość?

Skorzystajmy z danych: $m_\phi = 1018$ MeV/c^2, $M_\Omega = 1672$ MeV/c^2, stąd różnica w której kasują się nieznane masy kwarków s

$$
\Delta = M_\Omega - \frac{3}{2}m_\phi = 143.5 \text{ MeV}/c^2 \ \rightarrow\ \frac{g}{c^2} = \frac{4}{3}\frac{\Delta}{\ln(4/3)} = 665.09 \text{ MeV}\,. \tag{54}
$$

Stałą g możemy oszacować z równania (49) porównując masy dwóch mezonów złożonych z kwarków c i b, oznaczanych jako $J/\Psi(\bar{c}c)$ oraz $\Upsilon(\bar{b}b)$:

$$
\begin{aligned}
m_\Upsilon &= 9460 \text{ MeV} \quad m_b = 4650 \text{ MeV} \\
m_{J/\Psi} &= 3097 \text{ MeV} \quad m_c = 1250 \text{ MeV}\,.
\end{aligned}
\tag{55}
$$

Podane wyżej masy kwarków są w pewnym sensie „wyssane z palca". Masy kwarków w nierelatywistycznych modelach potencjalnych nie są bezpośrednio mierzone i można je wyznaczyć, dopasowując spektrum stanów przewidywanych przez dany model do danych. Wyżej podaliśmy masy, które nie odbiegają zbytnio od mas używanych w literaturze i które dają dobre przewidywanie na g. Mamy

$$
\begin{aligned}
\Delta_{\text{mes}} &= m_\Upsilon - m_{J/\Psi} \\
&= 2(m_b - m_c) + (E^{(2)}(m_b/2) - E^{(2)}(m_c/2)) \\
&= 2(m_b - m_c) + \frac{g}{c^2}\frac{1}{2}\ln\frac{m_c}{m_b}\,.
\end{aligned}
\tag{56}
$$

Stąd

$$
\frac{g}{c^2} = 2\frac{(m_\Upsilon - m_{J/\Psi}) - 2(m_b - m_c)}{\ln m_c/m_b} = 665.29 \text{ MeV}\,. \tag{57}
$$

Widzimy, że wartość g jest w zgodzie z wynikiem otrzymanym dla kwarka s.

Niestety, ciężkie bariony złożone z trzech kwarków c lub b nie są znane doświadczalnie. Istnieją tylko przewidywania teoretyczne uzyskane w komputerowych symulacjach chromodynamiki kwantowej: $M_{ccc} = 4793 \pm 10$ MeV (np. N.S. Dhindsa *et al.*, Phys. Rev. D

112 (2025) L111501, przegląd innych wyników teoretycznych można znaleźć w tabeli III w pracy *Spectroscopy and Radiative Decays of* Ω_{ccc} *and* Ω_{bbb} *Baryons in a Quark-Diquark Model*, Chaitanya Anil Bokade, Bhaghyesh, arXiv:2510.03703 [hep-ph]). Korzystając ze wzoru (52) z zamainą kwarka $s \to c$ otrzymujemy

$$M_{ccc} \geqslant \frac{3}{2} m_{J/\Psi} + \frac{3}{4}\frac{g}{c^2} \ln\frac{4}{3} = 4789 \text{ MeV}, \tag{58}$$

w zgodzie z oszacowaniem numerycznym z QCD.

7 Dlaczego potencjał logarytmiczny?

Okazuje się, że w przypadku potencjału logarytmicznego, różnice energii między poziomami energetycznymi nie zależą od masy cząstki. Taką własność obserwuje się w dla mezonów z dwoma ciężkimi kwarkami (n numeruje poziomy, a s jest sumarycznym spinem obu kwarków):

(n,s)				
$(1,0)$	$\eta_c(1S)$	2984	$\eta_b(1s)$	9399
$(1,1)$	$J/\psi(1S)$	3097	$\Upsilon(1s)$	9460
$(2,0)$	$\eta_c(2s)$	3637	$\eta_b(2s)$	9999
$(2,1)$	$\psi(2S)$	3686	$\Upsilon(2s)$	10023

Mamy dla steanów ψ

$$\begin{aligned} \psi(2S) - J/\psi(1S) &= 589, \\ \Upsilon(2s) - \Upsilon(1s) &= 563. \end{aligned}$$

oraz stanów η

$$\begin{aligned} \eta_c(2s) - \eta_c(1S) &= 653, \\ \eta_b(2s) - \eta_b(1s) &= 600. \end{aligned}$$

Wykażemy teraz, że potencjał logarytmiczny ma taką własność. Spektrum atomu wodoropodobnego znajdujemy rozwiązując radialne równanie Schrödingera

$$\left[-\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\right) + \frac{2\mu}{\hbar^2}\left(V(r) - E\right) + \frac{l(l+1)}{r^2}\right] R(r) = 0 \tag{59}$$

W naszym przypadku masa zredukowana dla dwóch kwarków o tej samej masie m wynosi

$$\mu = \frac{m}{2}.$$

Przypomnijmy, że pełna funkcja falowa ma postać

$$\psi^n_{lm}(r,\theta,\varphi) = R^n_l(r) Y^m_l(\theta,\varphi), \tag{60}$$

gdzie radialna funkcja R zależy jawnie od l i – jak się zaraz przekonamy – od liczby kwantowej n zwanej *radialną*. Podstawmy

$$R = \frac{u}{r} \text{ czyli } u = rR. \tag{61}$$

Mamy

$$u'' = R''r + 2R' \text{ or } \frac{1}{r}u'' = R'' + \frac{2}{r}R' \tag{62}$$

Rozpiszmy

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\right)R = r^2R'' + 2rR' = ru'' \tag{63}$$

i dalej

$$-u'' + \left[\frac{m}{\hbar^2}\left(V(r) - E\right) + \frac{l(l+1)}{r^2}\right]u = 0. \tag{64}$$

Przeskalowywujemy zmienną r

$$r = \kappa\rho. \tag{65}$$

Wtedy

$$u'' = \frac{1}{\kappa^2}\frac{d^2u}{d\rho^2} \tag{66}$$

i równanie ma postać

$$-\frac{d^2u}{d\rho^2} + \left[\frac{m}{\hbar^2}\kappa^2\left(V(\kappa\rho) - E\right) + \frac{l(l+1)}{\rho^2}\right]u = 0. \tag{67}$$

Zakładamy, że potencjał

$$V(r) = g\ln(r/r_0) \tag{68}$$

i dobieramy $\kappa = \sqrt{r_0/m}$ (dla $\hbar = 1$). Mamy

$$-\frac{d^2u}{d\rho^2} + \left[r_0\left(g\ln(\rho) - g\frac{1}{2}\ln(mr_0) - E\right) + \frac{l(l+1)}{\rho^2}\right]u = 0. \tag{69}$$

Przesuwamy energię o stałą

$$\tilde{E} = E + g\frac{1}{2}\ln(mr_0). \tag{70}$$

Widać, że $\tilde{E}_n$ nie zależy od m, a w róznicach energii człon logarytmiczny się kasuje:

$$\text{nie zależy od } m\text{: } \tilde{E}_n - \tilde{E}_k = E_n - E_k. \tag{71}$$