

# Wybrane problemy kwantowo mechaniczne

zestaw 9

na dzień 10.12.2025. środa 16:35

sala A-1-03

## Kondensat Bosego-Einsteina

Obniżając temperaturę gazu atomów o spinie będącym liczbą naturalną (poniżej mikro kelwinów), można uzyskać stan, w którym prawie wszystkie atomy są w tym samym stanie kwantowym. Poniższe zadania ilustrują, jak taki system można badać przy użyciu metody wariacyjnej i jak jego własności zależą od znaku wzajemnego oddziaływania.

1. Oszacować metodą wariacyjną energię stanu podstawowego trójwymiarowego oscylatora harmonicznego

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\vec{r}^2$$

przymiując za funkcję próbną

$$\psi_\sigma(\vec{r}) = \frac{1}{(\sigma^2\pi)^{3/4}} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right), \quad (1)$$

gdzie  $\sigma$  jest parametrem wariacyjnym. Porównać otrzymany wynik z wynikiem dokładnym.

2. Przedyskutować własności spektrum dwóch nieoddziaływujących oscylatorów (wartości energii, degeneracje)

$$H = \frac{\vec{p}_1^2}{2m} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\vec{r}_1^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\vec{r}_2^2. \quad (2)$$

Jak wygląda funkcja falowa stanu podstawowego?

3. Załóżmy, że istnieje oddziaływanie pomiędzy dwoma cząstkami opisanymi hamiltonianem (2):  $V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ . Oddziaływanie to jest krótkozasięgowe względem skali  $a_0 = \sqrt{\hbar/m\omega}$  charakterystycznej dla badanego układu. Oznacza to, że dla dwóch funkcji  $f$  i  $g$ , które na odcinku rzędu  $a_0$  są prawie stałe, można zastosować przybliżenie

$$\int \int f(\vec{r}_1)g(\vec{r}_2)V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)d^3\vec{r}_1d^3\vec{r}_2 \simeq \frac{4\pi\hbar^2}{m}a \int f(\vec{r})g(\vec{r})d^3\vec{r}. \quad (3)$$

Współczynnik proporcjonalności jest tak dobrany, aby można było zdefiniować stałą  $a$  o wymiarze długości, która nosi nazwę długości rozpraszania (scattering length). Stała ta może być ujemna (potencjał przyciągający) lub dodatnia (potencjał odpychający) i zależy od rodzaju atomów. Na przykład dla atomów sodu (izotop  $^{32}\text{Na}$ )  $a = 3,4$  nm, a dla litu (izotop  $^7\text{Li}$ )  $a = -1,5$  nm.

(a) Obliczyć w pierwszym rzędzie rachunku zaburzeń poprawkę do energii stanu podstawowego pochodzącą od oddziaływania  $V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ . Skomentować zależność tej poprawki od znaku  $a$ .

(b) Przedyskutować stosowalność rachunku zaburzeń w zależności od wartości  $a$  i  $a_0$ .

4. Rozważmy układ  $N$  cząstek

$$H = \sum_i \left( \frac{\vec{p}_i^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 \vec{r}_i^2 \right) + \frac{1}{2} \sum_{i,j: i \neq j} V(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \quad (4)$$

Oszacować energię stanu podstawowego przy pomocy metody wariacyjnej, używając jako funkcji próbnej

$$\Psi_\sigma(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) = \psi_\sigma(\vec{r}_1) \psi_\sigma(\vec{r}_2) \dots \psi_\sigma(\vec{r}_N), \quad (5)$$

gdzie  $\psi_\sigma(\vec{r})$  jest zdefiniowane w (1). Obliczyć osobno średnią wartość energii kinetycznej, potencjalnej i energii oddziaływania w tym stanie, a następnie zminimalizować sumę względem parametru  $\sigma$ . W tym celu warto wprowadzić bezwymiarowe zmienne  $\tilde{E} = E/(N\hbar\omega)$  oraz  $x = \sigma/a_0$ . Zapisać energię całkowitą w postaci

$$\tilde{E} = \dots + \frac{\eta}{x^3}. \quad (6)$$

Ile wynosi  $\eta$ ?

5. Dla  $a > 0$  naszkicować zależność  $\tilde{E}$  od  $x$  dla różnych wartości  $\eta = 0, 10, 100, 1000$ .
6. Przyjmując, że  $\eta \gg 1$  wykazać, że wkład od energii kinetycznej jest zaniedbywalny. W tym przybliżeniu znaleźć  $\tilde{E}_{\min}$ . Jak energia kondensatu (stanu podstawowego) zależy od  $N$ ?
7. Dla  $a < 0$  naszkicować zależność  $\tilde{E}$  od  $x$  dla różnych wartości  $\eta = 0, -0.1, -0.27, -1$ . Skomentować stosowalność przybliżenia (3) w okolicy  $x = 0$ .
8. Wykazać, że dla  $a < 0$  istnieje wartość krytyczna  $|\eta_c|$  powyżej której  $\tilde{E}$  nie posiada lokalnego minimum w  $x \neq 0$ . Wartość  $\eta_c$  można znaleźć z warunku, aby  $\tilde{E}$  w funkcji  $x$  miało punkt przegięcia. Znaleźć współrzędną  $x_c$  punktu przegięcia. Obliczyć odpowiadającą punktowi krytycznemu wartość  $\sigma_c$  jako funkcję  $a_0$ .