

Wybrane problemy kwantowo mechaniczne

zestaw 5

na dzień 12.11.2023. środa 16:35

sala A-1-03

Kryptografia kwantowa

1. Prawdopodobieństwo odzyskania spinu.

Założmy, że na układzie o spinie $1/2$, który znajduje się w stanie $|+\rangle$ dokonujemy pomiaru spinu S_θ . Jakie jest prawdopodobieństwo, że po ponownym pomiarze spinu względem osi z otrzymamy znowu wartość $1/2$?

2. Stan Bella.

Udowodnić, że tzw. stan Bella, ma następującą własność

$$\begin{aligned} |\Sigma\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |a : +\rangle |b : +\rangle + |a : -\rangle |b : -\rangle \} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |a : +\rangle_\theta |b : +\rangle_\theta + |a : -\rangle_\theta |b : -\rangle_\theta \}. \end{aligned}$$

Zatem niezależnie od tego względem której osi będziemy mierzyć spin cząstek a : $S_\theta^{(a)}$, zawsze dostaniemy wynik $\pm 1/2$ z prawdopodobieństwem $1/2$. Jeżeli otrzymamy wartość $+1/2$ to stan $|\Sigma\rangle$ skołapsuje do stanu $|a : +\rangle_\theta |b : +\rangle_\theta$, a jeżeli otrzymamy $-1/2$ to po pomiarze pozostanie stan $|a : -\rangle_\theta |b : -\rangle_\theta$. Do Boleka dotrze zatem odpowiednio stan o tym samym rzucie spinu cząstki b co stan Alicji cząstki a . Z tego powodu stan $|\Sigma\rangle$ jest wygodny do przesyłania informacji.

3. Założmy teraz, że Alicja, która przygotowuje układ cząstek (a, b) w stanie $|\Sigma\rangle$, mierzy spin cząstek a względem osi z , a Bolek po jej pomiarze wykonuje pomiar spinu cząstek b względem osi z albo osi x . Jakie otrzyma wyniki pomiarów i z jakim prawdopodobieństwem w zależności od wyniku otrzymanego przez Alicję?
4. Stan początkowy cząstek a i b o spinie $1/2$ ma postać stanu Bella $|\Sigma\rangle$. Przypuśćmy teraz, że między Alicją i Boleka wkradł się szpieg S, który mierzy spin cząstki b wzdłuż osi $\vec{n}_\theta$ zanim cząstka b dotrze do Boleka.

- Jakie wyniki otrzyma agent S w zależności od wyników otrzymanych przez Alicję?
- Następnie po pomiarze dokonany przez agenta S, Bolek mierzy spin cząstek b (S_β^b) dla kąta $\beta = 0, \pi/2$ (oś z i oś x). Jakie wyniki otrzymuje Bolek w zależności od wyników pomiarów agenta? Jakie są prawdopodobieństwa ich otrzymania?
- Jakie jest prawdopodobieństwo $P(\theta)$, że Alicja i Bolek otrzymają te same rezultaty, po pomiarze dokonany przez agenta S?

- Jaka jest wartość oczekiwana $P(\theta)$, jeżeli agent S wybiera kąt θ w sposób przypadkowy z przedziału $[0, 2\pi]$ z jednorodnym rozkładem prawdopodobieństwa?
- Jaka jest wartość oczekiwana $P(\theta)$, jeżeli agent S wybiera kąt $\theta = 0$ lub $\theta = \pi/2$ z prawdopodobieństwami $1/2$?