

Wybrane problemy kwantowo mechaniczne

zestaw 4

na dzień 05.11.2023. środa 16:35

sala A-1-03

1. Elektron i proton znajdują się w stanie o spinie 0, tzw. stan singletowy

$$|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|e : +\rangle |p : -\rangle - |e : -\rangle |p : +\rangle). \quad (1)$$

Pokazaliśmy, że jeżeli w wyniku pomiaru spinu elektronu S_α^e otrzymamy wartość $+1/2$, to stan singletowy kolapsuje do stanu

$$|0\rangle \xrightarrow{S_\alpha^e = +\frac{1}{2}} |\Phi\rangle = |e : +\rangle_\alpha |p : -\rangle_\alpha. \quad (2)$$

Jakie jest prawdopodobieństwo, że wyniku pomiaru S_β^p na protonie otrzymamy wynik $\pm 1/2$? W tym celu udowodnić wzory:

$$\begin{aligned} |+\rangle_\theta &= +\cos\frac{\theta-\alpha}{2} |+\rangle_\alpha + \sin\frac{\theta-\alpha}{2} |-\rangle_\alpha, \\ |-\rangle_\theta &= -\sin\frac{\theta-\alpha}{2} |+\rangle_\alpha + \cos\frac{\theta-\alpha}{2} |-\rangle_\alpha. \end{aligned} \quad (3)$$

2. Obliczyć współczynnik korelacji

$$E(\alpha, \beta) = \frac{\langle S_\alpha^e \otimes S_\beta^p \rangle_0 - \langle S_\alpha^e \rangle_0 \langle S_\beta^p \rangle_0}{\sqrt{\langle S_\alpha^{e2} \rangle_0 \langle S_\beta^{p2} \rangle_0}}$$

w stanie singletowym: $\langle \dots \rangle_0 = \langle 0 | \dots | 0 \rangle$.

3. **Model zmiennych ukrytych.** Załóżmy że stan, na który dysocjuje atom wodoru jest stanem iloczynowym (a więc nie jest stanem splątany w przeciwieństwie do stanu singletowego) i wprowadźmy ukrytą zmienną w postaci kąta kwantyzacji θ :

$$|\psi, \theta\rangle = |e : +\rangle_\theta |p : -\rangle_\theta.$$

Ponieważ kąt θ jest nieznany, wszystkie średnie liczone są jako średniowanie po kącie θ z pewnym rozkładem prawdopodobieństwa:

$$\langle \mathcal{O} \rangle_\psi = \int_0^{2\pi} d\theta P(\theta) {}_\theta\langle p : - | {}_\theta\langle e : + | \mathcal{O} | e : + \rangle_\theta | p : - \rangle_\theta.$$

Przyjmując jednorodny rozkład prawdopodobieństwa

$$P(\theta) = \frac{1}{2\pi}$$

obliczyć: $\langle S_\alpha^e \rangle_\psi$, $\langle S_\beta^p \rangle_\psi$ oraz $\langle S_\alpha^e \otimes S_\beta^p \rangle_\psi$ i ostatecznie $E_\psi(\alpha, \beta)$. Porównać z wynikiem na E z poprzedniego zadania.

Kryptografia kwantowa

4. Stan początkowy cząstek a i b o spinie $1/2$ ma postać tzw. stanu Bella

$$|\Sigma\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ |a : +\rangle_{\alpha} |b : +\rangle_{\beta} + |a : -\rangle_{\alpha} |b : -\rangle_{\beta} \right\}. \quad (4)$$

Cząstki przygotowane w stanie (4) rozlatują się w dwu przeciwnych kierunkach. Najpierw Alicja mierzy składową spinu cząstki a wzdłuż osi $\vec{n}_{\alpha}$, później Bolek mierzy spin cząstki b względem osi $\vec{n}_{\beta}$. Rozważmy przypadek kiedy $\alpha = 0$ (oś z). Przypuśćmy, że agent S, ukryty między źródłem a Bolkim mierzy spin cząstki b wzdłuż osi $\vec{n}_{\theta}$ zanim cząstka b dotrze do Bolka.

- Jakie wyniki otrzyma agent S w zależności od wyników otrzymanych przez Alicję?
- Następnie po pomiarze dokonany przez agenta S, Bolek mierzy spin b dla kąta $\beta = 0, \pi/2$ (oś z i oś x). Jakie wyniki otrzymuje Bolek w zależności od wyników pomiarów agenta? Jakie są prawdopodobieństwa ich otrzymania?
- Jakie jest prawdopodobieństwo $P(\theta)$, że Alicja i Bolek otrzymają te same rezultaty, po pomiarze dokonany przez agenta S?
- Jaka jest wartość oczekiwana $P(\theta)$, jeżeli agent S wybiera kąt θ w sposób przypadkowy z przedziału $[0, 2\pi]$ z jednorodnym rozkładem prawdopodobieństwa?
- Jaka jest wartość oczekiwana $P(\theta)$, jeżeli agent S wybiera kąt $\theta = 0$ lub $\theta = \pi/2$ z prawdopodobieństwami $1/2$?