

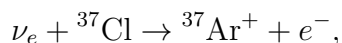
Neutrina

1 Wstęp

Wolfgang Pauli w grudniu 1930 roku w słynnym liście do uczestników spotkania fizyków zajmujących się promieniowaniem jądrowym, które odbywało się w Tybindze (Niemcy), zaproponował wyjaśnienie pozornego niezachowania energii w rozpadzie beta. Podczas rozpadu beta np. jądra trytu (izotop wodoru o składzie (pnn)) na jądro helu ${}^3\text{He} = (ppn)$ i elektron zaobserwowano, że energia elektronu nie przyjmuje wartości około 18 keV, odpowiadającej różnicy mas trytu i helu, ale ma ciągły rozkład w obszarze $0 < E_e < 18.6$ keV. Gdyby rozpad trytu był trójciałowy, to energia równa różnicy mas trytu i helu mogłaby się rozkładać w sposób ciągły na energię elektronu i tej trzeciej cząstki. Pauli nazwał tę cząstkę *neutronem*¹ i oszacował jej masę na 1/100 masy protonu. Późniejsze eksperymenty pokazały, że masa ta jest znacznie mniejsza i powszechnie uważano, że neutrino są bezmasowe. Neutrino elektronowe odkryte zostało dopiero w roku 1956 przez Fredericka Reinesa i Clyde’a Cowana, którzy badali promieniowanie reaktora elektrowni jądrowej w Savannah River (USA). Cowan nie dożył roku 1995, kiedy Reines otrzymał nagrodę Nobla za to odkrycie.

Badania nad promieniowaniem Słońca pozwoliły na stworzenie w XX wieku zaawansowanego modelu, opartego na *cyklach* reakcji jądrowych zachodzących we wnętrzu Słońca, który przewidywał m.in. wielkość strumienia neutrin, które docierają na powierzchnię Ziemi. Wielkość strumienia neutrin dość silnie zależy od temperatury wewnątrz Słońca, stąd pojawiła się konieczność precyzyjnych pomiarów liczby neutrin docierających ze Słońca na Ziemię, aby tę temperaturę zmierzyć. Musimy sobie zdawać sprawę, że eksperymenty neutrinowe są niezmiernie trudne do przeprowadzenia, ze względu na bardzo mały przekrój czynny na oddziaływanie neutrin z materią.

Pierwszy taki eksperyment przeprowadził w latach 1970–1994 Raymond Davis (nagroda Nobla 2002). Eksperyment ten opierał się na detektorze umieszczonym w nieczynnej kopalni w Homestake w Dakocie Płn. (USA). Był to cylinder wypełniony 615 tonami płynnej substancji zawierającej chlor². Na skutek reakcji neutrino elektronowego z chlorem produkował się argon 37,



który następnie wyodrębniano z roztworu. Operację wyodrębniania promieniotwórczego argonu 37 wykonywano co mniej więcej 50 dni. W ten sposób zaobserwowano około 27 oddziaływań neutrin rocznie. Było to o 60% mniej niż spodziewana teoretycznie liczba neutrin.

Wyjaśnienie tego niedoboru opiera się na założeniu, że neutrino jednak mają masę. Wówczas neutrino mogą *oscylować*. Oznacza to, że powstałe w Słońcu neutrino elektronowe może w trakcie propagacji do Ziemi zamienić się w np. neutrino mionowe, które nie oddziałuje z chlorem³. Hipotezę oscylacji neutrin sformułował dużo wcześniej Bruno M. Pontecorvo,

¹Nazwa neutrino, którą propagował Enrico Fermi, została przyjęta później.

²Był to tetra-chloro-etylen, C_2Cl_4 .

³Neutrino produkowane w Słońcu mają maksymalną energię rzędu 10 MeV, a to jest za mało, żeby wyprodukować mion, którego masa wynosi $105,7 \text{ MeV}/c^2$.

fizyk włoski (1913–1993), który w 1950 roku wyjechał do ZSRR, gdzie pracował i pozostał do śmierci. Uczestniczył tam m.in. w wytworzeniu sowieckiej bomby jądrowej.

Hipoteza oscylacji neutrin zakłada, że neutrina elektronowe, mionowe i taonowe są kombinacjami stanów stacjonarnych (stanów o dobrze określonych masach) ν_1 , ν_2 oraz ν_3 . W Słońcu w wyniku oddziaływań słabych produkuje się neutrino elektronowe, które jest pewną kombinacją liniową neutrin $\nu_{1,2,3}$. Ponieważ każde z nich ma inną masę, stan kwantowy, który dociera na Ziemię jest inną kombinacją, którą z powrotem musimy rozłożyć na stany $\nu_{e,\mu,\tau}$, gdyż detekcja następuje poprzez oddziaływanie słabe. Z matematycznego punktu widzenia mamy więc do czynienia z dwoma bazami: jedna jest bazą własną oddziaływań słabych, a druga bazą własną propagacji (masy).

2 Ewolucja kwantowa neutrin

Ponieważ neutrina mają bardzo małe masy (do niedawna uważano, że neutrina są bezmasowe) do sformułowania teorii neutrin należałoby użyć formalizmu relatywistycznego opartego na równaniu Diraca. Tu posłużymy się nierelatywistyczną mechaniką kwantową, co prowadzi do pewnych uproszczeń, ale pozwala bardzo szybko dojść do sedna sprawy, jakim jest mieszanie neutrin. Znamy trzy rodzaje neutrin odpowiadające trzem leptonom: elektronowi, mionowi i taonowi. Odpowiadające im stany będziemy oznaczać literami alfabetu greckiego

$$\{\alpha, \beta, \gamma\} = \{e, \mu, \tau\}. \quad (1)$$

Są to stany własne oddziaływań słabych, jedyne typu oddziaływań, któremu podlegają neutrina. Odpowiadające im leptony oddziałują słabo, ale też elektrycznie, gdyż są to cząstki naładowane. Zatem neutrina, które powstają w wyniku np. rozpadu beta, albo które oddziałują w detektorach cząstek w procesach odwrotnych do rozpadu beta to właśnie stany (1). Jednakże nie są to stany własne swobodnego hamiltonianu, który odpowiada za ewolucję czasową. Innymi słowy hamiltonian swobodny jest diagonalny w innej bazie niż hamiltonian oddziaływania. Stany własne hamiltonianu swobodnego (stany własne masy) oznaczają będziemy literami łacińskimi

$$\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}. \quad (2)$$

Odpowiednie rozwiązania równania Schrödingera dla neutrina o pędzie $\vec{p}$ przyjmują postać fali płaskiej

$$|\nu_i(t, \vec{x})\rangle = e^{-iE_i t + i\vec{p}\cdot\vec{x}} |\nu_i\rangle, \quad (3)$$

gdzie stany $|\nu_i\rangle$ są stanami własnymi masy w chwili początkowej $t = 0$.

Założymy teraz, że energia neutrina o pędzie $\vec{p}$ spełnia związek relatywistyczny

$$E_i = \sqrt{m_i^2 + |\vec{p}|^2}, \quad (4)$$

gdzie dla ułatwienia przyjęliśmy $c = 1$ oraz $\hbar = 1$. Założymy, że neutrina porusza się wzdłuż osi z z pędem $\vec{p} = (0, 0, p)$. Ponieważ neutrina są prawie bezmasowe, mamy w przybliżeniu, że

$$t \simeq z. \quad (5)$$

Wówczas czynnik fazowy z równania (3) przyjmuje postać

$$E_i t - \vec{p} \cdot \vec{x} \simeq (E_i - p) z = \left(\sqrt{m_i^2 + p^2} - p \right) z. \quad (6)$$

Możemy teraz rozwinąć pierwiastek

$$p \sqrt{1 + \frac{m_i^2}{p^2}} - p \simeq \frac{m_i^2}{2p} \simeq \frac{m_i^2}{2E}, \quad (7)$$

gdzie założyliśmy, że $p \gg m_i$ (przybliżenie ultrarelatywistyczne, w którym rozwijamy czynnik fazowy z dokładnością do m_i^2 daje $E \simeq p$ w mianowniku (7)). Zatem rozwiązanie swobodnego równania Schrödingera przyjmuje postać

$$|\nu_i(z)\rangle = \exp\left(-i \frac{m_i^2}{2E} z\right) |\nu_i\rangle. \quad (8)$$

3 Mieszanie i oscylacje neutrin

Założmy teraz, że w chwili $t = 0$ ($z = 0$) w wyniku rozpadu β powstaje neutrino $|\alpha\rangle$ (gdzie $\alpha = e, \mu$ lub τ). Aby zbadać propagację tego stanu w czasie musimy rozłożyć go w bazie stanów własnych masy

$$|\nu(0)\rangle = |\nu_\alpha\rangle = \sum_i U_{\alpha i} |\nu_i\rangle, \quad (9)$$

gdzie macierz U jest unitarna

$$\sum_{i=1,2,3} U_{\beta i}^* U_{\alpha i} = \delta_{\alpha\beta}, \quad \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} U_{\alpha j}^* U_{\alpha i} = \delta_{ij}. \quad (10)$$

Obliczmy teraz amplitudę prawdopodobieństwa, że w punkcie z neutrino będzie typu β jeżeli punkcie $z = 0$ było ono typu α

$$\langle \nu_\beta | \nu_\alpha(z) \rangle = \sum_{i=1,2,3} U_{\beta i}^* U_{\alpha i} e^{-i(m_i^2/2E)z} \quad (11)$$

i w konsekwencji prawdopodobieństwo oscylacji

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(z) = \sum_{i,j=1,2,3} U_{\beta i}^* U_{\alpha i} U_{\beta j} U_{\alpha j}^* \exp\left(-i \frac{m_{ij}^2}{2E} z\right), \quad (12)$$

gdzie wprowadziliśmy oznaczenie:

$$m_{ij}^2 = m_i^2 - m_j^2. \quad (13)$$

3.1 Dwa neutrina

W przypadku dwóch neutrin macierz U jest po prostu macierzą obrotu

$$U = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} e \\ \mu \end{matrix} & \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \end{matrix}, \quad (14)$$

gdzie zaznaczyliśmy, że indeks kolumn przebiega wartości w przestrzeni stanów własnych masy, a wiersze odpowiadają stanom fizycznym. Mamy zatem

$$\begin{aligned} P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu}(z) &= \sum_{i,j=1,2} U_{\mu i} U_{e i} U_{\mu j} U_{e j} \exp \left(-i \frac{m_{ij}^2}{2E} z \right) \\ &= (U_{\mu 1} U_{e 1})^2 + (U_{\mu 2} U_{e 2})^2 + (U_{\mu 1} U_{e 1}) (U_{\mu 2} U_{e 2}) \left[\exp \left(-i \frac{m_{12}^2}{2E} z \right) + \exp \left(+i \frac{m_{12}^2}{2E} z \right) \right] \\ &= 2 (\sin \theta \cos \theta)^2 \left[1 - \cos \left(\frac{m_{12}^2}{2E} z \right) \right] \\ &= \sin^2 (2\theta) \sin^2 \left(\frac{m_{12}^2}{4E} z \right), \end{aligned} \quad (15)$$

gdzie użyliśmy relacji

$$\begin{aligned} m_{12}^2 &= -m_{21}^2, \\ \sin 2\phi &= 2 \sin \phi \cos \phi, \\ \sin^2 \frac{\phi}{2} &= \frac{1}{2} (1 - \cos \phi). \end{aligned}$$

3.2 Trzy neutrina

Rozwijając eksponentę otrzymujemy

$$\begin{aligned} P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(z) &= \sum_{i,j} U_{\beta i}^* U_{\alpha i} U_{\beta j} U_{\alpha j}^* \left(\cos \frac{m_{ij}^2 z}{2E} - i \sin \frac{m_{ij}^2 z}{2E} \right) \\ &= \sum_{i,j} U_{\beta i}^* U_{\alpha i} U_{\beta j} U_{\alpha j}^* \left(1 - 2 \sin^2 \frac{m_{ij}^2 z}{4E} - i \sin \frac{m_{ij}^2 z}{2E} \right) \\ &= \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{i>j} \operatorname{Re}(U_{\beta i}^* U_{\alpha i} U_{\beta j} U_{\alpha j}^*) \sin^2 \frac{m_{ij}^2 z}{4E} + 2 \sum_{i>j} \operatorname{Im}(U_{\beta i}^* U_{\alpha i} U_{\beta j} U_{\alpha j}^*) \sin \frac{m_{ij}^2 z}{2E}, \end{aligned} \quad (16)$$

gdzie skorzystaliśmy z warunku unitarności (10). Zauważmy, że

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(U_{\beta i}^* U_{\alpha i} U_{\beta j} U_{\alpha j}^*) &\text{ symetryczne } i \longleftrightarrow j, \\ \operatorname{Im}(U_{\beta i}^* U_{\alpha i} U_{\beta j} U_{\alpha j}^*) &\text{ antysymetryczne } i \longleftrightarrow j. \end{aligned} \quad (17)$$

Aby zrozumieć konsekwencje istnienia niezerowego członu $\text{Im}(\dots)$ w równaniu (16), musimy odwołać się do formalizmu relatywistycznego. W równaniu Diraca sprzężenie ładunkowe zamieniające cząstkę na antycząstkę zawiera sprzężenie zespolone funkcji falowej, co w przypadku macierzy mieszania sprowadza się do zamiany

$$U \rightarrow U^*$$

i w konsekwencji, w świetle równania (17), prowadzi do następującej transformacji:

$$\begin{aligned} \text{Re}(U_{\beta i}^* U_{\alpha i} U_{\beta j} U_{\alpha j}^*) &\rightarrow + \text{Re}(U_{\beta i} U_{\alpha i}^* U_{\beta j}^* U_{\alpha j}), \\ \text{Im}(U_{\beta i}^* U_{\alpha i} U_{\beta j} U_{\alpha j}^*) &\rightarrow - \text{Im}(U_{\beta i} U_{\alpha i}^* U_{\beta j}^* U_{\alpha j}), \end{aligned} \quad (18)$$

co oznacza, że jeżeli $\text{Im}(U_{\beta i}^* U_{\alpha i} U_{\beta j} U_{\alpha j}^*) \neq 0$ to

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} \neq P_{\bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\beta}.$$

Niezerowy człon $\text{Im}(\dots)$ skutkuje tym, że neutrino oscylują inaczej niż antyneutrino.

4 Macierz PMNS

Dla przypadku z dwoma neutrinami, macierz U jest macierzą obrotów. Pokażemy teraz, że w przypadku $N > 2$ macierz U można sparametryzować przy pomocy $N(N-1)/2$ parametrów rzeczywistych (kątów) i $(N-1)(N-2)/2$ faz. Ogólnie, macierz unitarną należącą do grupy $U(N)$ można sparametryzować przez N^2 rzeczywistych parametrów. W tym celu zapiszmy macierz U jako zespół N kolumn, z których każda ma N elementów (a więc jako zespół N -elementowych wektorów $\mathbf{u}_i$ gdzie $i = 1, \dots, N$). Wówczas warunek unitarności $U^\dagger U = 1$ przyjmuje postać

$$\begin{bmatrix} [& \mathbf{u}_1^\dagger &] \\ & \ddots & \\ [& \mathbf{u}_N^\dagger &] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left[\begin{matrix} \mathbf{u}_1 \end{matrix} \right] & \cdots & \left[\begin{matrix} \mathbf{u}_N \end{matrix} \right] \end{bmatrix} = 1, \quad (19)$$

co daje N^2 równań zespolonych:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1^\dagger \cdot \mathbf{u}_1 &= 1, \quad \mathbf{u}_1^\dagger \cdot \mathbf{u}_2 = 0, \quad \dots \quad \mathbf{u}_1^\dagger \cdot \mathbf{u}_N = 0, \\ \mathbf{u}_2^\dagger \cdot \mathbf{u}_1 &= 0, \quad \mathbf{u}_2^\dagger \cdot \mathbf{u}_2 = 1, \quad \dots \quad \mathbf{u}_2^\dagger \cdot \mathbf{u}_N = 0, \\ &\vdots \\ \mathbf{u}_N^\dagger \cdot \mathbf{u}_1 &= 0, \quad \mathbf{u}_N^\dagger \cdot \mathbf{u}_2 = 0, \quad \dots \quad \mathbf{u}_N^\dagger \cdot \mathbf{u}_N = 1. \end{aligned} \quad (20)$$

Ale, oprócz równań „diagonalnych” $\mathbf{u}_i^\dagger \mathbf{u}_i = 1$, pozostałe równania są parami sprzężone (zależne), np. $\mathbf{u}_1^\dagger \mathbf{u}_2 = 0$ oraz $\mathbf{u}_2^\dagger \mathbf{u}_1 = 0$. Zatem niezależne są tylko równania „nad diagonalną”, których jest $(N^2 - N)/2$ oraz te „na diagonalnej”, których jest N . Jednak równania „nad diagonalną” są zespolone, a więc dają $N^2 - N$ warunków rzeczywistych, natomiast równania „na diagonalnej” są rzeczywiste i dają N warunków rzeczywistych. Zatem unitarność daje N^2 warunków rzeczywistych. Stąd całkowita liczba parametrów rzeczywistych opisujących

macierz $U(N)$ jest równa różnicy między liczbą rzeczywistych elementów zespolonej macierzy $N \times N$, która wynosi $2N^2$, a liczbą wyżej dyskutowanych warunków, czyli

$$2N^2 - N^2 = N^2.$$

Z kolei macierz ortogonalna $N \times N$ zależy od $N(N-1)/2$ rzeczywistych kątów. Wynika to z identycznego rozumowania, jak to które przeprowadziliśmy dla macierzy unitarnych, z tym że wektory $\mathbf{u}_i$ są rzeczywiste. Liczba niezależnych warunków odpowiada N równaniom na diagonalii oraz $(N^2 - N)/2$ równaniom nad diagonalą. Zatem liczba stopni swobody macierzy ortogonalnej O wynosi

$$N^2 - N - \frac{1}{2}(N^2 - N) = \frac{1}{2}N(N-1). \quad (21)$$

Stąd możemy obliczyć liczbę faz macierzy unitarnej

$$\begin{aligned} U &\rightarrow N^2, \\ O &\rightarrow \frac{1}{2}N(N-1), \\ \text{różnica} &\rightarrow \frac{1}{2}N(N+1). \end{aligned}$$

Zatem macierz unitarna $N \times N$ ma $N(N+1)/2$ faz. Pamiętajmy jednak, że w mechanice kwantowej funkcje falowe (stany), są określone z dokładnością do fazy. W naszym przypadku mamy N (w rzeczywistości 3) stanów własnych masy i N stanów fizycznych. Stąd mamy następującą dowolność wyboru fazy, która wynika z równania (9)

$$|\nu_\alpha\rangle \rightarrow e^{i\phi_\alpha} |\nu_\alpha\rangle = \sum_i e^{i\phi_\alpha} U_{\alpha i} e^{-i\theta_i} e^{i\theta_i} |\nu_i\rangle, \quad (22)$$

Sugeruje to, że z macierzy U można wyeliminować $2N$ faz. Jednak ponieważ do elementów macierzowych macierzy U wchodzi tylko różnice $\phi_\alpha - \theta_i$, to transformacja

$$\phi_\alpha \rightarrow \phi_\alpha + \delta, \quad \theta_i \rightarrow \theta_i + \delta \quad (23)$$

nie zmienia U . Zatem z macierzy U możemy poprzez redefinicję stanów $|\nu_\alpha\rangle$ oraz $|\nu_i\rangle$ „pozbyć się” tylko $2N - 1$ faz. Pozostaje zatem

$$\frac{1}{2}(N^2 + N) - (2N - 1) = \frac{1}{2}(N-1)(N-2) \quad (24)$$

faz. Liczba kątów jest równa liczbie parametrów macierzy ortogonalnej $O(N)$, która wynosi $N(N-1)/2$. Stąd dla grupy $U(2)$ mieszanie opisujemy tylko jednym kątem obrotu, a w przypadku grupy $U(3)$ trzema kątami i jedną fazą.

Macierz mieszania neutrin nazywana jest macierzą Pontecorvo-Makiego-Nakagawy-Sakaty (PMNS). Wygodna parametryzacja macierzy PMNS ma postać iloczynu trzech transformacji

$$\begin{aligned}
U = V_{\text{PMNS}} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\delta} & 0 & c_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{bmatrix}. \quad (25)
\end{aligned}$$

Oscylacje neutrin zależą zatem od sześciu parametrów: trzech kątów, jednej fazy i dwóch różnic kwadratów mas m_{ij}^2 , ponieważ różnice m_{ij}^2 spełniają związek:

$$m_{12}^2 + m_{23}^2 + m_{31}^2 = 0. \quad (26)$$

Miarą łamania symetrii cząstka-antycząstka jest wartość części urojonej $\text{Im}(U_{\alpha j}^* U_{\beta j} U_{\beta i}^* U_{\alpha i})$, która niezależnie od indeksów jest zawsze proporcjonalna do $\sin \delta$ (chyba, że któryś z kątów mieszania znika). Wygodnym wskaźnikiem istnienia części urojonej jest tzw. parametr Jarlskog

$$J = J_{\rho k} = \varepsilon_{\alpha\beta\rho} \varepsilon_{ijk} \text{Im} [U_{\alpha i} U_{\beta i}^* U_{\beta j} U_{\alpha j}^*] = \cos \theta_{13} \sin 2\theta_{12} \sin 2\theta_{13} \sin 2\theta_{23} \sin \delta, \quad (27)$$

który nie zależy od indeksów ρk i jak widzimy, jest proporcjonalny do $\sin \delta$.

5 Mieszanie neutrin a doświadczenie

Przyjmiemy teraz, że $\text{Im}(U_{\alpha j}^* U_{\beta j} U_{\beta i}^* U_{\alpha i}) = 0$. Wówczas:

$$\begin{aligned}
P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(z) &= \delta_{\alpha\beta} - 4 \text{Re}(U_{\alpha 1}^* U_{\beta 1} U_{\beta 2}^* U_{\alpha 2}) \sin^2 \frac{m_{21}^2 z}{4E} \\
&\quad - 4 \text{Re}(U_{\alpha 1}^* U_{\beta 1} U_{\beta 3}^* U_{\alpha 3}) \sin^2 \frac{m_{31}^2 z}{4E} - 4 \text{Re}(U_{\alpha 2}^* U_{\beta 2} U_{\beta 3}^* U_{\alpha 3}) \sin^2 \frac{m_{32}^2 z}{4E}. \quad (28)
\end{aligned}$$

Dopasowanie tego wzoru do danych doświadczalnych pozwoliłoby nam wyznaczyć pięć wolnych parametrów (pamiętajmy, że przyjęliśmy $\delta = 0$). Jest to jednak zadanie trudne, ze względu na bardzo małe przekroje czynne na oddziaływanie neutrin z materią (czyli także z detektorem). Zauważmy także, że wzór (28) nie jest czuły na znak m_{ij}^2 . Na szczęście Natura przychodzi nam tu z pomocą, gdyż okazuje się, że różnice kwadratów mas wykazują pewną hierarchię: $|m_{21}^2| \ll |m_{31}^2| \approx |m_{32}^2|$. W przybliżeniu mamy⁴:

$$\begin{aligned}
|m_{31}^2| &\approx |m_{32}^2| = \Delta m_{\text{atm}}^2 \sim 2.5 \times 10^{-3} \text{ eV}^2, \\
|m_{21}^2| &= \Delta m_{\odot}^2 \sim 7 \times 10^{-5} \text{ eV}^2, \quad (29)
\end{aligned}$$

⁴Dokładne wartości parametrów mieszania podamy pod koniec niniejszego rozdziału.

gdzie przyjęliśmy nomenklaturę, której pochodzenie zaraz wyjaśnimy, neutrina atmosferyczne i słoneczne. Zauważmy, że dla $\delta = 0$ wszystkie elementy macierzy V_{PMNS} są rzeczywiste i wzór (28) możemy przepisać w następujący sposób:

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(z) = \delta_{\alpha\beta} - 4(U_{\alpha 1}U_{\beta 1})(U_{\alpha 2}U_{\beta 2})\sin^2 \frac{\Delta m_\odot^2 z}{4E} - 4(U_{\alpha 1}U_{\beta 1} + U_{\alpha 2}U_{\beta 2})(U_{\beta 3}U_{\alpha 3})\sin^2 \frac{\Delta m_{\text{atm}}^2 z}{4E}. \quad (30)$$

Korzystając z warunku unitarności (10):

$$U_{\alpha 1}U_{\beta 1} + U_{\alpha 2}U_{\beta 2} = \delta_{\alpha\beta} - U_{\beta 3}U_{\alpha 3}$$

dostajemy ostatecznie

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(z) = \delta_{\alpha\beta} - 4(U_{\alpha 1}U_{\beta 1})(U_{\alpha 2}U_{\beta 2})\sin^2 \frac{\Delta m_\odot^2 z}{4E} - 4(\delta_{\alpha\beta} - U_{\beta 3}U_{\alpha 3})(U_{\beta 3}U_{\alpha 3})\sin^2 \frac{\Delta m_{\text{atm}}^2 z}{4E}. \quad (31)$$

Wygodnie jest argument sinusów występujących we wzorze (31) wyrażać w jednostkach charakterystycznych dla fizyki neutrin: różnicę mas w elektronowoltach, energię neutrin w giga-elektronowoltach, a odległość detektora od źródła w kilometrach:

$$\Psi = \frac{\Delta m^2 z}{4E\hbar} = 1.27 \times \left(\frac{\Delta m^2}{\text{eV}^2} \right) \times \left(\frac{z}{\text{km}} \right) \times \left(\frac{\text{GeV}}{E} \right). \quad (32)$$

Współczynnik 1.27 pochodzi z przeliczenia jednostek, gdzie użyliśmy, że $\hbar c = 197 \text{ MeV} \times \text{fm}$, a $1 \text{ fm} = 10^{-18} \text{ km}$.

Spróbujemy teraz oszacować wartości parametrów oscylacji posługując się wynikami (już w obecnej chwili historycznymi) kilku eksperymentów mierzących oscylacje. Bardzo użytecznym źródłem neutrin są reaktory energetyczne, przy jednym z nich na granicy francusko-belgijskiej w miejscowości Chooz dokonano w roku 1999 pomiaru prawdopodobieństwa oscylacji antyneutrin elektronowych. Późniejszy, rozbudowany eksperyment tzw. *double Chooz* działa nadal od roku 2014. Reaktor w Chooz produkuje $\alpha = \bar{\nu}_e$ o energii około 3 MeV, a detektor jest w odległości 1 km. Dla tych wartości otrzymujemy:

$$\text{CHOOZ: } \Psi_\odot \sim 3 \times 10^{-2}, \quad \Psi_{\text{atm}} \sim 1$$

i w związku z tym można zaniedbać przyczynę od $\Psi_\odot$. Detektor czuły jest na antyneutrino elektronowe: $\beta = \bar{\nu}_e$, stąd wzór (31) przyjmuje postać

$$P_{\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_e} = 1 - 4(1 - U_{e3}^2)U_{e3}^2 \sin^2 \Psi_{\text{atm}}.$$

Wynik CHOOZ był konsystentny z

$$U_{e3}^2 < 0.05$$

co przekłada się na kąt mieszania $\sin^2(2\theta_{13}) < 0.2$. Obecne wyniki wskazują na $\sin^2(2\theta_{13}) \sim 0.1$. Jak się okazuje, jest to najmniejszy element macierzy mieszania, z czego wynika, że neutrino elektronowe jest w zasadzie tylko mieszaniną $\nu_{1,2}$. Patrząc na parametryzację (25) widzimy, że małość tego kąta uzasadnia *a posteriori* zaniedbanie członu z fazą δ . W dalszej analizie przyjmujemy, że w przybliżeniu $U_{e3} \sim 0$, czyli

$$V_{\text{PMNS}} \approx \begin{bmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12}c_{23} & c_{12}c_{23} & s_{23} \\ s_{12}s_{23} & -c_{12}s_{23} & c_{23} \end{bmatrix}. \quad (33)$$

Eksperyment, który pozwolił na oszacowanie kąta mieszania θ_{23} nazywa się K2K i prowadził pomiary w latach 1999-2004. Eksperyment ten wykorzystywał dwa japońskie ośrodki badawcze: kompleks akceleratorów KEK zlokalizowany w dwóch kampusach w okolicach Tsukuby oraz wodny detektor neutrinowy ulokowany w wygaszonej kopalni cynku Kamioka, oddalony od KEK o około 250 km. Eksperyment Kamiokande (ang. *Kamioka Neutrino Decay Experiment*) pomyślany był pierwotnie w celu odkrycia ewentualnego rozpadu protonu, przyczynił się do odkrycia oscylacji neutrin słonecznych. Został rozbudowywany do wersji Superkamiokande, a obecnie trwa projekt dalszego powiększenia do wersji Hiper. W omawianym eksperymencie K2K (w tłumaczeniu z angielskiego: *KEK do Kamioki*) wytworzoną w KEK wiązkę neutrin mionowych kierowano do detektora Kamiokande i badano ich oscylacje. W laboratorium KEK protony o energii 12 GeV produkują na tarczy aluminiowej mezony π^+ , które rozpadając się

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$$

emitując neutrina mionowe o średniej energii 1.3 GeV. Przyjmując odległość 250 km do detektora Superkamiokande otrzymujemy następujące wartości na kąty Ψ :

$$\text{K2K: } \Psi_\odot \sim 0.02, \quad \Psi_{\text{atm}} \sim 0.61.$$

Zaniedbując przyczynek od neutrin słonecznych otrzymujemy następujące (przybliżone) prawdopodobieństwa na oscylacje neutrin mionowych:

$$\begin{aligned} P_{\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu}(z) &= 1 - 4(1 - U_{\mu 3}^2)U_{\mu 3}^2 \sin^2 \Psi_{\text{atm}} = 1 - \sin^2 2\theta_{23} \sin^2 \Psi_{\text{atm}}, \\ P_{\nu_\mu \rightarrow \nu_e}(z) &= 4U_{\mu 3}^2 U_{e 3}^2 \sin^2 \Psi_{\text{atm}} = 0, \\ P_{\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau}(z) &= 4U_{\mu 3}^2 U_{\tau 3}^2 \sin^2 \Psi_{\text{atm}} = \sin^2 2\theta_{23} \sin^2 \Psi_{\text{atm}}. \end{aligned} \quad (34)$$

Najlepsze dopasowanie do danych z eksperymentu K2K daje:

$$\begin{aligned} \Delta m_{\text{atm}}^2 &= 2.8 \times 10^{-3}, \\ \sin^2 2\theta_{23} \sim 1 &\rightarrow \cos \theta_{23} = \sin \theta_{23} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \end{aligned} \quad (35)$$

a więc maksymalne mieszanie. Wynik na Δm_{atm}^2 jest konsystentny z przyjętym wcześniej założeniem (29). Zatem macierz mieszania możemy teraz zapisać w następujący sposób

$$V_{\text{PMNS}} \approx \begin{bmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12}/\sqrt{2} & c_{12}/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ s_{12}/\sqrt{2} & -c_{12}/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad (36)$$

gdzie do oszacowania pozostał nam ostatni kąt mieszania θ_{12} .

Kąt θ_{12} można wyznaczyć z oscylacji antyneutrino elektronowych, których źródłem są reaktory jądrowe, pod warunkiem, że $\Psi_{\odot}$ będzie duże, co oznacza, że odległość między źródłem a detektorem musi być znacznie większa niż w przypadku eksperymentu CHOOZ. Taki eksperyment pod nazwą KamLAND (ang. *Kamioka Liquid Scintillator Anti-Neutrino Detector*) wykonano w znanym nam już laboratorium Kamioka, ale tym razem obserwując antyneutrino elektronowe pochodzące w większości z 26 japońskich elektrowni jądrowych⁵. Średnia odległość od źródła wynosi około 180 km, a energia emitowanych neutronów wynosi około 4 MeV. W przeciwieństwie do CHOOZ (gdzie odległość od źródła była 1 km) kąta $\Psi_{\odot}$ nie można zaniedbać:

$$\text{KamLAND: } \Psi_{\odot} \sim 4, \quad \Psi_{\text{atm}} \sim 143.$$

Mimo, że $\sin \Psi_{\text{atm}} \sim 1$, to ze względu na małość elementu U_{e3} na mocy wzoru (31), do oscylacji antyneutrino elektronowych główny wkład pochodzi od neutronów słonecznych:

$$P_{\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_e}(t) = 1 - 4U_{e1}^2 U_{e2}^2 \sin^2 \Psi_{\odot} = 1 - \sin^2 2\theta_{12} \sin^2 \Psi_{\odot}. \quad (37)$$

Najlepsze dopasowanie do danych z eksperymentu KamLand daje

$$\begin{aligned} \Delta m_{\odot}^2 &= 6.9 \times 10^{-5} \text{ eV}^2, \\ 0.84 &< \sin^2 2\theta_{12} < 1, \end{aligned} \quad (38)$$

czyli znowu mieszanie jest prawie maksymalne. Wynik na $\Delta m_{\odot}^2$ jest konsystentny z przyjętym założeniem (29).

6 Podsumowanie

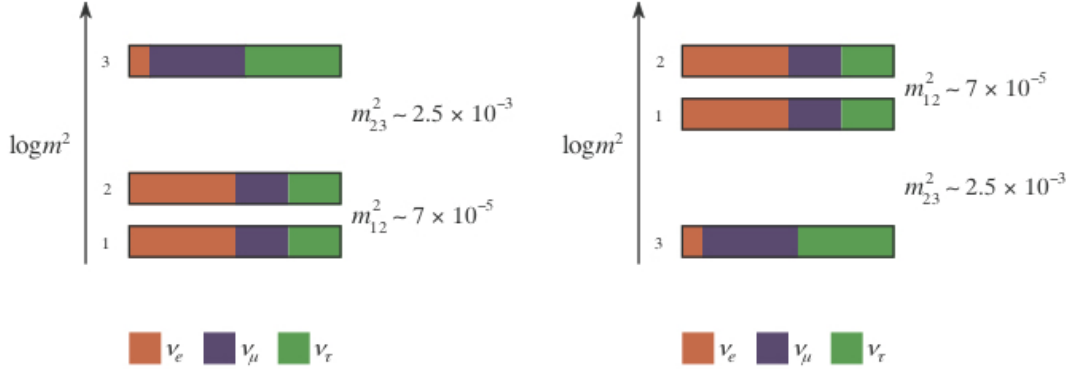
Można śmiało powiedzieć, że wiek XXI jest i zapewne będzie okresem bardzo aktywnym w dziedzinie fizyki neutronów. Odkrycie mieszania neutronów, a co za tym idzie udowodnienie, że neutrony mają masy, jest jednym z ważniejszych odkryć wprowadzających nas w obszar spoza Modelu Standardowego. Nasza obecna wiedza dotycząca parametrów mieszania neutronów podsumowana jest na rysunku 1 i w tabeli (39). Zwróćmy uwagę, że przy założeniu $\delta = 0$ wzór na oscylacje (28) nie jest czuły na znaki różnicy kwadratu mas $m_{ij}^2 = m_i^2 - m_j^2$. Stąd możliwe są dwa scenariusze: najlżejsze jest ν_1 (hierarchia zwykła) albo ν_3 (hierarchia odwrócona).

Informacje dotyczące absolutnej masy neutronów pochodzą z eksperymentów badających rozpad β trytu. Wyniki eksperymentów z Moguncji (Mainz) i z Troitska jak na razie dostarczają słabych ograniczeń

$$m_0 < 1,1 \text{ eV}/c^2.$$

Rząd wielkości lepsze są ograniczenia z rozważań kosmologicznych.

⁵W Japonii pracuje obecnie około 50. elektrowni jądrowych.



Rysunek 1: Graficzna ilustracja obecnego stanu wiedzy na temat kątów mieszania (zaznaczonych kolorami) i różnic kwadratów mas neutrin (w eV^2/c^4).

W kwietniu 2020 roku ukazał się w Nature artykuł grupy eksperymentalnej T2K z Japonii⁶ podający po raz pierwszy oszacowanie na łamiącą CP fazę δ macierzy PMNS. Najnowsze dane⁷ podane są poniżej:

$$\begin{aligned}
|m_{21}^2| &= (7,53 \pm 0,18) \times 10^{-5} \text{ eV}^2 \\
m_{32}^2 &= (+2,455 \pm 0,028) \times 10^{-3} \text{ eV}^2 \quad (\text{hierarchia normalna}) \\
&= (-2,529 \pm 0,029) \times 10^{-3} \text{ eV}^2 \quad (\text{hierarchia odwrócona}) \\
\sin^2(\theta_{12}) &= 0,307 \pm 0,013 \\
\sin^2(\theta_{13}) &= (2,19 \pm 0,07) \times 10^{-2} \\
\sin^2(\theta_{23}) &= 0,558^{+0,015}_{-0,021} \quad (\text{hierarchia normalna}) \\
&= 0,553^{+0,016}_{-0,024} \quad (\text{hierarchia odwrócona}) \\
\delta &= 1,19 \pm 0,22 \pi \quad (\text{radian}).
\end{aligned} \tag{39}$$

Neutrina atmosferyczne

Promienie kosmiczne (p,e) produkują π , które rozpadają się na neutrina:

$$\pi^{+(-)} \rightarrow \mu^{+(-)} + \bar{\nu}_{\mu}^{(-)}, \quad \mu^{+(-)} \rightarrow e^{+(-)} + \bar{\nu}_e^{(-)} + \bar{\nu}_{\mu}^{(-)}$$

Produkują się dwa razy więcej neutrin μ niż neutrin e . W detektorze wodnym Super-Kamiokande neutrina μ i e są wykrywane poprzez odwrotny proces β . Neutrino τ nie reagują, bo jest za mało energii na produkcję τ :

$$\nu_l + N \rightarrow N' + l$$

⁶The T2K Collaboration. *Constraint on the matter-antimatter symmetry-violating phase in neutrino oscillations*. Nature 580, 339-344 (2020). <https://doi.org/10.1038/s41586-020-2177-0>.

⁷S. Navas et al. (Particle Data Group), Phys. Rev. D 110, 030001 (2024).

Dla neutrin o energii 1 GeV

$$\Psi_{\odot} \sim 0.002 \div 1.3, \quad \Psi_{\text{atm}} \sim 0.05 \div 30$$

oba kąty są duże. Ale dla neutrin kilkugevowych można zaniedbać $\sin^2 \Psi_{\odot}$. Wówczas neutrina elektronowe nie oscylują, a neutrina mionowe oscylują w neutrina tauowe (analogicznie jak K2K). Była to historycznie pierwsza obserwacja oscylacji neutrin mionowych.