Wybrane problemy kwantowo mechaniczne

kolokwium

28.1.2026. środa 16:35

sala A-1-13

1. Znaleźć unormowane stany własne operatora anihilacji (stany koherentne)

$$\hat{a}\,|z\rangle = z\,|z\rangle\,,$$

gdzie z jest liczbą zespoloną oraz

$$\hat{a} \;=\; \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} + i\sqrt{\frac{1}{2m\omega\hbar}}\hat{p}.$$

W tym celu rozłożyć stan $|z\rangle$ na nieskończony szereg stanów własnych operatora $\hat{a}^\dagger\hat{a}$ i wyprowadzić regułę rekurencyjną dla współczynników tego rozwinięcia. Obliczyć iloczyn skalarny $\langle z'\,|z\rangle$. Znaleźć funkcje falowe odpowiadające stanowi $|z\rangle$ w reprezentacji położeniowej:

$$\psi_z(x) = \langle x\,|z\rangle\;.$$

WSKAZÓWKA

W celu znalezienia ww. funkcji należy rozwiązać równanie różniczkowe $\hat{a}\,|z\rangle = z\,|z\rangle$ wyrażając operator $\hat{a}$ przez operatory $\hat{x}$ oraz $\hat{p}$.

Rozwiązanie

$$\begin{aligned}
|z\rangle &= \sum_{n=0} c_n(z)\,|n\rangle\,,\\
a\,|z\rangle &= \sum_{n=1} c_n(z)\sqrt{n}\,|n-1\rangle = \sum_{n=0} c_{n+1}(z)\sqrt{n+1}\,|n\rangle\,.
\end{aligned}$$

Stąd

$$c_{n+1}(z) = \frac{z}{\sqrt{n+1}}c_n(z).$$

Stąd

$$c_n(z) = \frac{z^n}{\sqrt{n!}}c_0(z).$$

Iloczyn

$$\begin{aligned}
\langle z'\,|z\rangle &= c_0^*(z')c_0(z)\sum_{n,m=0}\frac{z'^{*m}z^n}{\sqrt{m!n!}}\,\langle m\,|n\rangle\\
&= c_0^*(z')c_0(z)\sum_{n=0}\frac{z'^{*n}z^n}{n!} = c_0^*(z')c_0(z)\exp(z'^*z).
\end{aligned}$$

Gdy $z' = z$ ten iloczyn powinien być równy 1

$$1 = |c_0(z)|^2 \, e^{|z|^2} \to c_0(z) = e^{-|z|^2/2}.$$

Czyli

$$\langle z' \, | z \rangle \exp\left(-\frac{1}{2} |z'|^2 - \frac{1}{2} |z|^2 + z'^* z \right).$$

Po zmianie zmiennych

$$\hat{\xi} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \hat{x}, \; \hat{\pi} = \frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}} \hat{p}. \tag{1}$$

mamy

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{1}{2}} \left(\hat{\xi} + i\hat{\pi} \right), \; \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{1}{2}} \left(\hat{\xi} - i\hat{\pi} \right) \tag{2}$$

Równanie na stan koherentny:

$$\sqrt{\frac{1}{2}} \left(\xi + \frac{d}{d\xi} \right) \psi_z(\xi) = z \psi_z(\xi). \tag{3}$$

rozwiązanie:

$$\psi_z(\xi) = C \exp\left(-\frac{1}{2} (\xi - \sqrt{2} z)^2 \right). \tag{4}$$

2. Stany własne operatora σ_z (macierz Pauliego) odpowiadające wartościom własnym ± 1 oznaczamy $|\pm\rangle$. Znaleźć wartości własne i wektory własne operatora

$$\Sigma_\theta = \vec{n}_\theta \cdot \vec{\sigma}$$

gdzie

$$\vec{n}_\theta = \cos\theta \, \vec{n}_z + \sin\theta \, \vec{n}_x$$

($\vec{n}_{z,x}$ wektory jednostkowe skierowane wzdględem osi z i x) a $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$.

Układ znajduje się w jednym ze stanów własnych operatora Σ_θ. Obliczyć prawdopodobieństwo otrzymania w wyniku pomiaru na tym stanie jednej z wartości własnych operatora Σ_α.

Rozwiązanie

$$\Sigma_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Równanie własne:

$$\begin{vmatrix} \cos\theta - \lambda & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{6}$$

ma postać

$$-\cos^2\theta + \lambda^2 - \sin^2\theta = \lambda^2 - 1 = 0. \tag{7}$$

Wartości własne $\lambda = \pm 1$.

Wektory własne obliczmy z równania:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta - \lambda & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 \tag{8}$$

co sprowadza się do jednego równania:

$$(\cos\theta - \lambda)\, x + \sin\theta\, y = 0. \tag{9}$$

Użyjemy tożsamości

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}, \\ \sin\theta &= 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}. \end{aligned} \tag{10}$$

Zastosujmy to do $\lambda = 1$:

$$\begin{aligned} &\left(\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} - \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right) x + 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\, y \\ = \;& -2\sin^2\frac{\theta}{2}\, x + 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\, y = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Rozwiązanie ma postać:

$$x = \cos\frac{\theta}{2},\; y = \sin\frac{\theta}{2}. \tag{12}$$

Dla $\lambda = -1$:

$$\begin{aligned} &\left(\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2}\right) x + 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\, y \\ = \;& 2\cos^2\frac{\theta}{2}\, x + 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\, y = 0 \end{aligned} \tag{13}$$

i rozwiązanie ma postać:

$$x = -\sin\frac{\theta}{2},\; y = \cos\frac{\theta}{2}. \tag{14}$$

Oznaczmy te wektory jako:

$$\begin{aligned} \left|+\right\rangle_\theta &= +\cos\frac{\theta}{2}\left|+\right\rangle + \sin\frac{\theta}{2}\left|-\right\rangle, \\ \left|-\right\rangle_\theta &= -\sin\frac{\theta}{2}\left|+\right\rangle + \cos\frac{\theta}{2}\left|-\right\rangle. \end{aligned} \tag{15}$$

Obliczmy amplitudy

$$\begin{aligned}
{}_\alpha\langle + | + \rangle_\theta &= \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\theta}{2} \\
&= \cos\frac{\theta-\alpha}{2}, \qquad (16) \\
{}_\alpha\langle - | + \rangle_\theta &= -\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\theta}{2} \\
&= \sin\frac{\theta-\alpha}{2}. \qquad (17) \\
{}_\alpha\langle - | - \rangle_\theta &= \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\theta}{2} \\
&= \cos\frac{\theta-\alpha}{2} \qquad (18)
\end{aligned}$$

i prawdopodobieństwa

$$\begin{aligned}
P_+(\alpha) &= {}_\alpha\langle + | + \rangle_\theta^2 = \cos^2\frac{\theta-\alpha}{2}, \\
P_-(\alpha) &= {}_\alpha\langle - | + \rangle_\theta^2 = \sin^2\frac{\theta-\alpha}{2}. \qquad (19)
\end{aligned}$$

3. Ewolucję czasową neutrin można opisać przy pomocy relatywistycznego hamiltonianu

$$H = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}. \qquad (20)$$

Rozwinąć H do pierwszego rzędu w m^2/p^2. Znaleźć ewolucję czasową dwóch neutrin o masach $m_{1,2}$. Stany ewoluujące wg. hamiltonianu (20) oznaczamy $|\nu_1\rangle$, $|\nu_2\rangle$. Stany fizyczne powiązane są ze stanami masowymi relacją

$$\begin{aligned}
|\nu_e\rangle &= |\nu_1\rangle\cos\theta + |\nu_2\rangle\sin\theta, \\
|\nu_\mu\rangle &= -|\nu_1\rangle\sin\theta + |\nu_2\rangle\cos\theta.
\end{aligned}$$

Dotyczy to zarówno neutrin jak i antyneutrin.

W chwili $t = 0$ w reaktorze produkuje sią (anty)neutrino elektronowe o pędzie p: $|\nu(t=0)\rangle = |\nu_e\rangle$. Obliczyć prawdopodobieństwo, $P_e(t)$ detekcji neutrina elektronowego w chwili $t > 0$. Prawdopodobieństwo to wyrazić przez tzw. długość oscylacji

$$L = \frac{4\pi\hbar p}{\Delta m_{12}^2 c^2}.$$

gdzie $\Delta m_{ij}^2 = \left|m_i^2 - m_j^2\right|$.

Rozwiązanie

$$\begin{aligned}
H &= \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} = pc\sqrt{1 + \frac{m^2c^2}{p^2}} = pc\left(1 + \frac{m^2c^2}{2p^2} + \dots\right) \\
&= pc + \frac{m^2c^4}{2pc} + \dots
\end{aligned}$$

Oznaczając

$$cp = E,\ z = ct,$$

otrzymujemy, że ewolucja czasowa

$$|\nu(t)\rangle = e^{-iEt/\hbar} e^{-i\frac{m^2c^4}{2E\hbar c}ct} |\nu(0)\rangle = e^{-iEt/\hbar} e^{-i\frac{m^2c^4}{2E\hbar c}z} |\nu(0)\rangle$$

Ewolucja czasowa neutrina fizycznego

$$|\nu_e(t)\rangle = |\nu_e\rangle = e^{-iEt/\hbar} \left\{ e^{-i\frac{m_1^2c^4}{2E\hbar c}z} |\nu_1\rangle \cos\theta + e^{-i\frac{m_2^2c^4}{2E\hbar c}z} |\nu_2\rangle \sin\theta \right\}.$$

Amplituda prawdopodobieństwa, że w chwili t jest to nadal neutrino elektronowe:

$$\langle \nu_e \, |\nu_e(t)\rangle = e^{-iEt/\hbar} \left\{ e^{-i\frac{m_1^2c^4}{2E\hbar c}z} \cos^2\theta + e^{-i\frac{m_2^2c^4}{2E\hbar c}z} \sin^2\theta \right\}.$$

Prawdopodobieństwo

$$\begin{aligned} P &= \left|\langle \nu_e \, |\nu_e(t)\rangle\right|^2 = \\ &= \cos^4\theta + \sin^4\theta + \sin^2\theta\cos^2\theta \left[e^{\frac{\left(m_1^2 - m_2^2\right)c^4}{2E\hbar c}z} + e^{\frac{-\left(m_1^2 - m_2^2\right)c^4}{2E\hbar c}z} \right] \\ &= \cos^4\theta + \sin^4\theta + 2\sin^2\theta\cos^2\theta\cos\left(\frac{2\pi z}{L}\right). \end{aligned}$$

Skorzystamy z tożsamości

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$$

dla członu z $\cos\left(\frac{2\pi z}{L}\right)$:

$$\begin{aligned} P &= \cos^4\theta + \sin^4\theta + 2\sin^2\theta\cos^2\theta - 4\sin^2\theta\cos^2\theta\sin^2\left(\frac{\pi z}{L}\right) \\ &= (\cos^2\theta + \sin^2\theta)^2 - \sin^2(2\theta)\sin^2\left(\frac{\pi z}{L}\right) \\ &= 1 - \sin^2(2\theta)\sin^2\left(\frac{\pi z}{L}\right). \end{aligned}$$