

Nierówności Bella, cz.1

Jednym z najtrudniejszych problemów pojęciowych mechaniki kwantowej jest tak zwany kolaps funkcji falowej. Załóżmy, że nieruchoma cząstka pozbawiona spinu rozpada się na dwie masywne cząstki o spinie $1/2$, które odlatują w przeciwnych kierunkach. Po pewnym czasie dokonuje się pomiaru rzutowania spinu jednej z cząstek wzdłuż osi kwantyzacji z (która może być wybrana np. wzdłuż kierunku ruchu). W zasadzie możliwe są dwa wyniki takiego pomiaru: $\pm 1/2$. Po dokonaniu tego pomiaru wynik pomiaru spinu drugiej cząstki – która może znajdować się nawet wiele kilometrów dalej – *musi być przeciwny*, mimo że żadna informacja nie może zostać przesłana z miejsca pierwszego pomiaru do drugiego. Ten paradoks został wskazany przez Einsteina, Rosena i Podolskiego, i skłonił Einsteina do nieufności wobec probabilistycznej interpretacji mechaniki kwantowej. Można sobie wyobrazić, że probabilistyczny charakter mechaniki kwantowej jest wynikiem naszej ograniczonej wiedzy o wszystkich stopniach swobody danego układu. Takie stopnie swobody nazywane są często ukrytymi zmiennymi. Bell udowodnił, że gdyby takie ukryte zmienne istniały, można byłoby zaprojektować eksperyment pozwalający odróżnić standardową mechanikę kwantową od mechaniki kwantowej z ukrytymi zmiennymi.

Problem zmiennych ukrytych najlepiej przedyskutować badając korelacje spinów – tak jak to wskazaliśmy powyżej na przykładzie cząstki bezspinowej. Dlatego najpierw przedyskutujemy własności stanów spinowych.

1 Spin elektronu lub protonu

Rozważmy wektor jednostkowy $\vec{n}_\theta$ leżący w płaszczyźnie $x - z$

$$\vec{n}_\theta = \cos \theta \vec{n}_z + \sin \theta \vec{n}_x \quad (1)$$

gdzie $\vec{n}_{x,z}$ są wektorami jednostkowymi odpowiednio wzdłuż osi x i z . Łatwo pokazać, że wartości własne operatora

$$S_\theta = \vec{n}_\theta \cdot \vec{S}, \quad (2)$$

gdzie $\vec{S} = (\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z)$ jest operatorem spinu $1/2$, wynoszą $\pm 1/2$ (przyjmujemy $\hbar = 1$). Rzeczywiście

$$S_\theta = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix} \quad (3)$$

i równanie własne

$$\begin{vmatrix} \cos \theta - \lambda & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (4)$$

ma postać

$$-\cos^2 \theta + \lambda^2 - \sin^2 \theta = \lambda^2 - 1 = 0. \quad (5)$$

Do tego samego wniosku możemy dojść obliczając

$$\begin{aligned} S_\theta^2 &= \frac{1}{4} (\vec{n}_\theta \cdot \vec{\sigma}) (\vec{n}_\theta \cdot \vec{\sigma}) = \frac{1}{4} (n_{\theta i} n_{\theta j}) (\sigma_i \sigma_j) \\ &= \frac{1}{4} (n_{\theta i} n_{\theta j}) (\delta_{ij} \mathbf{1} + i \varepsilon_{ijk} \sigma_k) = \frac{1}{4} \mathbf{1}, \end{aligned} \quad (6)$$

co oznacza, że wartości własne wynoszą $\pm 1/2$.

Wektory własne obliczamy w następujący sposób:

$$\begin{bmatrix} \cos \theta - \lambda & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 \quad (7)$$

co sprowadza się do równania

$$(\cos \theta - \lambda) x + \sin \theta y = 0. \quad (8)$$

Jest to jedno równanie na dwie zmienne. Drugie równanie uzyskamy normalizując wektory własne do jedności.

Użyjmy teraz własności

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}, \\ \sin \theta &= 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Stosując to równanie do $\lambda = 1$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} &\left(\cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) x + 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} y \\ &= -2 \sin^2 \frac{\theta}{2} x + 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} y = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Rozwiązanie ma postać

$$x = \cos \frac{\theta}{2}, \quad y = \sin \frac{\theta}{2}. \quad (11)$$

Z kolei dla $\lambda = -1$:

$$\begin{aligned} &\left(\cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) x + 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} y \\ &= 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} x + 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} y = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

i rozwiązanie ma postać

$$x = -\sin \frac{\theta}{2}, \quad y = \cos \frac{\theta}{2}. \quad (13)$$

Przyjmijmy oznaczenia na znormalizowane wektory własne do wartości własnych $\pm 1/2$

$$\begin{aligned} |+\rangle_\theta &= +\cos \frac{\theta}{2} |+\rangle + \sin \frac{\theta}{2} |-\rangle, \\ |-\rangle_\theta &= -\sin \frac{\theta}{2} |+\rangle + \cos \frac{\theta}{2} |-\rangle. \end{aligned} \quad (14)$$

Z powyższego równania wynika, że stany $|\pm\rangle$ odpowiadają wartości $\theta = 0$, czyli są standardowymi wektorami własnymi dla kwantyzacji wzdłuż osi z .

Założmy, że elektron jest początkowo w stanie $|+\rangle_\theta$. Następnie mierzymy rzut spinu wzdłuż innej osi zadanej przez wektor $\vec{n}_\alpha$. Wartości własne operatora S_α , tak jak poprzednio, wynoszą $\pm 1/2$. Obliczymy teraz prawdopodobieństwa uzyskania $\lambda = 1/2$ albo $\lambda = -1/2$. Najpierw obliczymy iloczyny skalarne

$$\begin{aligned}\alpha\langle + | + \rangle_\theta &= \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\theta}{2} \\ &= \cos \frac{\theta - \alpha}{2},\end{aligned}\tag{15}$$

$$\begin{aligned}\alpha\langle - | + \rangle_\theta &= -\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\theta}{2} \\ &= \sin \frac{\theta - \alpha}{2},\end{aligned}\tag{16}$$

$$\begin{aligned}\alpha\langle + | - \rangle_\theta &= -\cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\theta}{2} \\ &= -\sin \frac{\theta - \alpha}{2},\end{aligned}\tag{17}$$

$$\begin{aligned}\alpha\langle - | - \rangle_\theta &= \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\theta}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\theta}{2} \\ &= \cos \frac{\theta - \alpha}{2}.\end{aligned}\tag{18}$$

Zatem

$$\begin{aligned}P_+(\alpha) &= \alpha\langle + | + \rangle_\theta^2 = \cos^2 \frac{\theta - \alpha}{2}, \\ P_-(\alpha) &= \alpha\langle - | + \rangle_\theta^2 = \sin^2 \frac{\theta - \alpha}{2}.\end{aligned}\tag{19}$$

Teraz bardzo prosto możemy obliczyć wartość oczekiwaną

$$\theta\langle + | S_\alpha | + \rangle_\theta = \frac{1}{2} \left(\cos^2 \frac{\theta - \alpha}{2} - \sin^2 \frac{\theta - \alpha}{2} \right) = \frac{1}{2} \cos(\theta - \alpha).\tag{20}$$

Łatwo pokazać, że

$$\theta\langle - | S_\alpha | - \rangle_\theta = -\frac{1}{2} \cos(\theta - \alpha).\tag{21}$$

Będziemy także potrzebowali

$$\begin{aligned}\theta\langle - | S_\alpha | + \rangle_\theta &= \theta\langle + | S_\alpha | - \rangle_\theta \\ &= \frac{1}{2} \left(-\sin \frac{\theta - \alpha}{2} \cos \frac{\theta - \alpha}{2} - \sin \frac{\theta - \alpha}{2} \cos \frac{\theta - \alpha}{2} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \sin(\theta - \alpha).\end{aligned}\tag{22}$$

2 Korelacje dwóch spinów

Rozważmy atom wodoru, który dysocjuje na proton i elektron. Załóżmy, że układ elektron-proton znajduje się w sfaktoryzowanym stanie spinowym (czyli takim, w którym stan całego układu można zapisać jako iloczyn stanów spinowych poszczególnych cząstek)

$$|e : +\rangle_\theta |p : -\rangle_\theta . \quad (23)$$

Założmy teraz, że mierzymy spin elektronu wzdłuż osi $\vec{n}_\alpha$, a odpowiadający temu pomiarowi operator oznaczamy jako S_α^e . Oczywiście prawdopodobieństwo otrzymania wyniku $+1/2$ jest takie samo jak wcześniej

$$P_+^e(\alpha) = \cos^2 \frac{\theta - \alpha}{2},$$

jednakże po dokonaniu pomiaru układ znajduje się teraz w stanie

$$|e : +\rangle_\alpha |p : -\rangle_\theta . \quad (24)$$

Spin protonu pozostaje niezmienny przez ten pomiar, ponieważ stan początkowy był sfaktoryzowany. W wyniku przeprowadzenia pomiaru stan (23) *skolapsował* do stanu (24).

Łatwo obliczyć teraz wartość oczekiwaną operatorów spinu S_α^e and S_β^p w stanie (23)

$$\begin{aligned} \langle S_\alpha^e \rangle &= {}_\theta \langle e : + | S_\alpha^e | e : + \rangle_\theta {}_\theta \langle p : - | \mathbf{1}^p | p : - \rangle_\theta \\ &= \frac{1}{2} \cos(\theta - \alpha) \end{aligned} \quad (25)$$

oraz

$$\begin{aligned} \langle S_\beta^p \rangle &= {}_\theta \langle e : + | \mathbf{1}^e | e : + \rangle_\theta {}_\theta \langle p : - | S_\beta^p | p : - \rangle_\theta \\ &= -\frac{1}{2} \cos(\theta - \beta). \end{aligned} \quad (26)$$

Na koniec obliczmy

$$\begin{aligned} \langle S_\alpha^e \otimes S_\beta^p \rangle &= {}_\theta \langle e : + | S_\alpha^e | e : + \rangle_\theta {}_\theta \langle p : - | S_\beta^p | p : - \rangle_\theta \\ &= -\frac{1}{4} \cos(\theta - \alpha) \cos(\theta - \beta). \end{aligned} \quad (27)$$

Obliczmy teraz współczynnik korelacji

$$E(\alpha, \beta) = \frac{\langle S_\alpha^e \otimes S_\beta^p \rangle - \langle S_\alpha^e \rangle \langle S_\beta^p \rangle}{\sqrt{\langle S_\alpha^{e2} \rangle \langle S_\beta^{p2} \rangle}} = 0.$$

Mianownik jest trywialny ze względu na własność (6), a licznik się zeruje na podstawie równań (25)–(27). Zerowa korelacja odzwierciedla fakt, że system był w stanie sfaktoryzowanym.

na podstawie J.-L. Basdevant, L. Dalibard *The Quantum Mechanics Solver*