

Nierówności Bella

Jednym z najtrudniejszych problemów pojęciowych mechaniki kwantowej jest tak zwany kolaps funkcji falowej. Załóżmy, że nieruchoma cząstka pozbawiona spinu rozpada się na dwie masywne cząstki o spinie $1/2$, które odlatują w przeciwnych kierunkach. Po pewnym czasie dokonuje się pomiaru rzutowania spinu jednej z cząstek wzdłuż osi kwantyzacji z (która może być wybrana np. wzdłuż kierunku ruchu). W zasadzie możliwe są dwa wyniki takiego pomiaru: $\pm 1/2$. Po dokonaniu tego pomiaru wynik pomiaru spinu drugiej cząstki – która może znajdować się nawet wiele kilometrów dalej – *musi być przeciwny*, mimo że żadna informacja nie może zostać przesłana z miejsca pierwszego pomiaru do drugiego. Ten paradoks został wskazany przez Einsteina, Rosena i Podolskiego, i skłonił Einsteina do nieufności wobec probabilistycznej interpretacji mechaniki kwantowej. Można sobie wyobrazić, że probabilistyczny charakter mechaniki kwantowej jest wynikiem naszej ograniczonej wiedzy o wszystkich stopniach swobody danego układu. Takie stopnie swobody nazywane są często ukrytymi zmiennymi. Bell udowodnił, że gdyby takie ukryte zmienne istniały, można byłoby zaprojektować eksperyment pozwalający odróżnić standardową mechanikę kwantową od mechaniki kwantowej z ukrytymi zmiennymi.

Problem zmiennych ukrytych najlepiej przedyskutować badając korelacje spinów – tak jak to wskazaliśmy powyżej na przykładzie cząstki bezspinowej. Dlatego najpierw przedyskutujemy własności stanów spinowych.

1 Spin elektronu lub protonu

Rozważmy wektor jednostkowy $\vec{n}_\theta$ leżący w płaszczyźnie $x - z$

$$\vec{n}_\theta = \cos \theta \vec{n}_z + \sin \theta \vec{n}_x \quad (1)$$

gdzie $\vec{n}_{x,z}$ są wektorami jednostkowymi odpowiednio wzdłuż osi x i z . Łatwo pokazać, że wartości własne operatora

$$S_\theta = \vec{n}_\theta \cdot \vec{S}, \quad (2)$$

gdzie $\vec{S} = (\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z)$ jest operatorem spinu $1/2$, wynoszą $\pm 1/2$ (przyjmujemy $\hbar = 1$). Rzeczywiście

$$S_\theta = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix} \quad (3)$$

i równanie własne

$$\begin{vmatrix} \cos \theta - \lambda & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (4)$$

ma postać

$$-\cos^2 \theta + \lambda^2 - \sin^2 \theta = \lambda^2 - 1 = 0. \quad (5)$$

Do tego samego wniosku możemy dojść obliczając

$$\begin{aligned} S_\theta^2 &= \frac{1}{4} (\vec{n}_\theta \cdot \vec{\sigma}) (\vec{n}_\theta \cdot \vec{\sigma}) = \frac{1}{4} (n_{\theta i} n_{\theta j}) (\sigma_i \sigma_j) \\ &= \frac{1}{4} (n_{\theta i} n_{\theta j}) (\delta_{ij} \mathbf{1} + i \varepsilon_{ijk} \sigma_k) = \frac{1}{4} \mathbf{1}, \end{aligned} \quad (6)$$

co oznacza, że wartości własne wynoszą $\pm 1/2$.

Wektory własne obliczamy w następujący sposób:

$$\begin{bmatrix} \cos \theta - \lambda & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 \quad (7)$$

co sprowadza się do równania

$$(\cos \theta - \lambda) x + \sin \theta y = 0. \quad (8)$$

Jest to jedno równanie na dwie zmienne. Drugie równanie uzyskamy normalizując wektory własne do jedności.

Użyjmy teraz własności

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}, \\ \sin \theta &= 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Stosując to równanie do $\lambda = 1$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} &\left(\cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) x + 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} y \\ &= -2 \sin^2 \frac{\theta}{2} x + 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} y = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Rozwiązanie ma postać

$$x = \cos \frac{\theta}{2}, \quad y = \sin \frac{\theta}{2}. \quad (11)$$

Z kolei dla $\lambda = -1$:

$$\begin{aligned} &\left(\cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) x + 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} y \\ &= 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} x + 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} y = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

i rozwiązanie ma postać

$$x = -\sin \frac{\theta}{2}, \quad y = \cos \frac{\theta}{2}. \quad (13)$$

Przyjmijmy oznaczenia na znormalizowane wektory własne do wartości własnych $\pm 1/2$

$$\begin{aligned} |+\rangle_\theta &= +\cos \frac{\theta}{2} |+\rangle + \sin \frac{\theta}{2} |-\rangle, \\ |-\rangle_\theta &= -\sin \frac{\theta}{2} |+\rangle + \cos \frac{\theta}{2} |-\rangle. \end{aligned} \quad (14)$$

Z powyższego równania wynika, że stany $|\pm\rangle$ odpowiadają wartości $\theta = 0$, czyli są standardowymi wektorami własnymi dla kwantyzacji wzdłuż osi z .

Założmy, że elektron jest początkowo w stanie $|+\rangle_\theta$. Następnie mierzymy rzut spinu wzdłuż innej osi zadanej przez wektor $\vec{n}_\alpha$. Wartości własne operatora S_α , tak jak poprzednio, wynoszą $\pm 1/2$. Obliczymy teraz prawdopodobieństwa uzyskania $\lambda = 1/2$ albo $\lambda = -1/2$. Najpierw obliczymy iloczyny skalarne

$$\begin{aligned}\alpha\langle + | + \rangle_\theta &= \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\theta}{2} \\ &= \cos \frac{\theta - \alpha}{2},\end{aligned}\tag{15}$$

$$\begin{aligned}\alpha\langle - | + \rangle_\theta &= -\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\theta}{2} \\ &= \sin \frac{\theta - \alpha}{2},\end{aligned}\tag{16}$$

$$\begin{aligned}\alpha\langle + | - \rangle_\theta &= -\cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\theta}{2} \\ &= -\sin \frac{\theta - \alpha}{2},\end{aligned}\tag{17}$$

$$\begin{aligned}\alpha\langle - | - \rangle_\theta &= \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\theta}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\theta}{2} \\ &= \cos \frac{\theta - \alpha}{2}.\end{aligned}\tag{18}$$

Zatem

$$\begin{aligned}P_+(\alpha) &= \alpha\langle + | + \rangle_\theta^2 = \cos^2 \frac{\theta - \alpha}{2}, \\ P_-(\alpha) &= \alpha\langle - | + \rangle_\theta^2 = \sin^2 \frac{\theta - \alpha}{2}.\end{aligned}\tag{19}$$

Z równań (15)–(18) otrzymujemy

$$\begin{aligned}|+\rangle_\theta &= +\cos \frac{\theta - \alpha}{2} |+\rangle_\alpha + \sin \frac{\theta - \alpha}{2} |-\rangle_\alpha, \\ |-\rangle_\theta &= -\sin \frac{\theta - \alpha}{2} |+\rangle_\alpha + \cos \frac{\theta - \alpha}{2} |-\rangle_\alpha.\end{aligned}\tag{20}$$

Teraz bardzo prosto możemy obliczyć wartość oczekiwaną

$$\theta\langle + | S_\alpha | + \rangle_\theta = \frac{1}{2} \left(\cos^2 \frac{\theta - \alpha}{2} - \sin^2 \frac{\theta - \alpha}{2} \right) = \frac{1}{2} \cos(\theta - \alpha).\tag{21}$$

Łatwo pokazać, że

$$\theta\langle - | S_\alpha | - \rangle_\theta = -\frac{1}{2} \cos(\theta - \alpha).\tag{22}$$

Będziemy także potrzebowali

$$\begin{aligned}\theta\langle - | S_\alpha | + \rangle_\theta &= \theta\langle + | S_\alpha | - \rangle_\theta \\ &= \frac{1}{2} \left(-\sin \frac{\theta - \alpha}{2} \cos \frac{\theta - \alpha}{2} - \sin \frac{\theta - \alpha}{2} \cos \frac{\theta - \alpha}{2} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \sin(\theta - \alpha).\end{aligned}\tag{23}$$

2 Korelacje dwóch spinów

Rozważmy atom wodoru, który dysocjuje na proton i elektron. Załóżmy, że układ elektron-proton znajduje się w sfaktoryzowanym stanie spinowym (czyli takim, w którym stan całego układu można zapisać jako iloczyn stanów spinowych poszczególnych cząstek)

$$|e : +\rangle_\theta |p : -\rangle_\theta . \quad (24)$$

Założmy teraz, że mierzymy spin elektronu wzdłuż osi $\vec{n}_\alpha$, a odpowiadający temu pomiarowi operator oznaczamy jako S_α^e . Oczywiście prawdopodobieństwo otrzymania wyniku $+1/2$ jest takie samo jak wcześniej

$$P_+^e(\alpha) = \cos^2 \frac{\theta - \alpha}{2},$$

jednakże po dokonaniu pomiaru układ znajduje się teraz w stanie

$$|e : +\rangle_\alpha |p : -\rangle_\theta . \quad (25)$$

Kolejny pomiar spinu S_α^e musi dać $+1/2$ z prawdopodobieństwem 1. Gdyby tak nie było, mechanika kwantowa nie miałaby żadnej zdolności przewidywania. Spin protonu pozostaje niezmienny przez ten pomiar, ponieważ stan początkowy był sfaktoryzowany. W wyniku przeprowadzenia pomiaru stan (24) *skolapsował* do stanu (25).

Łatwo obliczyć teraz wartość oczekiwaną operatorów spinu S_α^e and S_β^p w stanie (24)

$$\begin{aligned} \langle S_\alpha^e \rangle &= {}_\theta \langle e : + | S_\alpha^e | e : + \rangle_\theta {}_\theta \langle p : - | \mathbf{1}^p | p : - \rangle_\theta \\ &= \frac{1}{2} \cos(\theta - \alpha) \end{aligned} \quad (26)$$

oraz

$$\begin{aligned} \langle S_\beta^p \rangle &= {}_\theta \langle e : + | \mathbf{1}^e | e : + \rangle_\theta {}_\theta \langle p : - | S_\beta^p | p : - \rangle_\theta \\ &= -\frac{1}{2} \cos(\theta - \beta). \end{aligned} \quad (27)$$

Na koniec obliczmy

$$\begin{aligned} \langle S_\alpha^e \otimes S_\beta^p \rangle &= {}_\theta \langle e : + | S_\alpha^e | e : + \rangle_\theta {}_\theta \langle p : - | S_\beta^p | p : - \rangle_\theta \\ &= -\frac{1}{4} \cos(\theta - \alpha) \cos(\theta - \beta). \end{aligned} \quad (28)$$

Obliczmy teraz współczynnik korelacji

$$E(\alpha, \beta) = \frac{\langle S_\alpha^e \otimes S_\beta^p \rangle - \langle S_\alpha^e \rangle \langle S_\beta^p \rangle}{\sqrt{\langle S_\alpha^{e2} \rangle \langle S_\beta^{p2} \rangle}} = 0.$$

Mianownik jest trywialny ze względu na własność (6), a licznik się zeruje na podstawie równań (26)–(28). Zerowa korelacja odzwierciedla fakt, że system był w stanie sfaktoryzowanym.

3 Korelacje w stanie singletowym

Założymy teraz, że po rozpadzie atomu wodoru elektron i proton znajdują się w stanie o spinie 0, tzw. stan singletowy

$$|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|e : +\rangle |p : -\rangle - |e : -\rangle |p : +\rangle). \quad (29)$$

Nie jest to już stan iloczynowy typu (24). Jeśli teraz zmierzmy S_α^e , to powstaje pytanie jakie są możliwe wyniki i ich prawdopodobieństwa. W tym celu rozłożymy operator jedności elektronu w bazie stanów własnych S_α^e

$$\mathbf{1} = |e : +\rangle_{\alpha\alpha} \langle e : +| \otimes \mathbf{1}^p + |e : -\rangle_{\alpha\alpha} \langle e : -| \otimes \mathbf{1}^p \quad (30)$$

i zastosujemy go do stanu (29)

$$\begin{aligned} |0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|e : +\rangle_{\alpha\alpha} \langle e : +| e : +\rangle |p : -\rangle - |e : +\rangle_{\alpha\alpha} \langle e : +| e : -\rangle |p : +\rangle \\ &\quad + |e : -\rangle_{\alpha\alpha} \langle e : -| e : +\rangle |p : -\rangle - |e : -\rangle_{\alpha\alpha} \langle e : -| e : -\rangle |p : +\rangle], \end{aligned} \quad (31)$$

a następnie posłużymy się równaniami (15)–(18)

$$\begin{aligned} |0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\cos \frac{\alpha}{2} |e : +\rangle_\alpha |p : -\rangle - \sin \frac{\alpha}{2} |e : +\rangle_\alpha |p : +\rangle \right. \\ &\quad \left. - \sin \frac{\alpha}{2} |e : -\rangle_{\alpha\alpha} |p : -\rangle - \cos \frac{\alpha}{2} |e : -\rangle_\alpha |p : +\rangle \right]. \end{aligned} \quad (32)$$

Możliwe wyniki pomiarów S_α^e to

- $+1/2$ z prawdopodobieństwem

$$P_+(\alpha) = \frac{1}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}, \quad (33)$$

- $-1/2$ z prawdopodobieństwem

$$P_-(\alpha) = \frac{1}{2}.$$

Założmy, że wynik pomiaru wyniósł $+1/2$. Oznacza to, że po pomiarze funkcja falowa *skolapsowała* do stanu

$$\begin{aligned} |0\rangle \xrightarrow{S_\alpha^e = +\frac{1}{2}} |\Phi\rangle &= \cos \frac{\alpha}{2} |e : +\rangle_\alpha |p : -\rangle - \sin \frac{\alpha}{2} |e : +\rangle_\alpha |p : +\rangle \\ &= |e : +\rangle_\alpha \left(\cos \frac{\alpha}{2} |p : -\rangle - \sin \frac{\alpha}{2} |p : +\rangle \right) \\ &= |e : +\rangle_\alpha |p : -\rangle_\alpha, \end{aligned} \quad (34)$$

gdzie przy przejściu do ostatniej linijki zastosowaliśmy pierwszy wzór (20). Widzimy, że zarówno elektron jaki proton są w stanach własnych odpowiednich operatorów spinu wzdłuż

osi $\vec{n}_\alpha$. Jeśli teraz zmierzmy S_β^p , mamy znowu dwie możliwości $\pm 1/2$ z następującymi prawdopodobieństwami

$$\begin{aligned} P_+(\beta) &= |\beta \langle + | - \rangle_\alpha| = \sin^2 \frac{\alpha - \beta}{2}, \\ P_-(\beta) &= |\beta \langle - | - \rangle_\alpha| = \cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2}. \end{aligned} \quad (35)$$

Podsumujmy: w pierwszym pomiarze spinów elektronów otrzymujemy oba możliwe wyniki z takim samym prawdopodobieństwem $1/2$, ale prawdopodobieństwa uzyskania $\pm 1/2$ w drugim pomiarze spinów protonów zależą od względnego kąta między osiami pomiarowymi i generalnie nie są równe. Gdybyśmy najpierw zmierzili spiny protonów, uzyskalibyśmy $\pm 1/2$ z równymi prawdopodobieństwami $1/2$. Różnica wyników takich dwóch doświadczeń, które różnią się jedynie kolejnością pomiarów *na tym samym stanie*, była nie do przyjęcia dla Einsteina, który twierdził, że „rzeczywiste stany dwóch obiektów oddzielonych przestrzennie muszą być od siebie niezależne”. Chodzi tu o to, że elektron i proton po rozpadzie atomu wodoru mogą być od siebie bardzo daleko. Ten prosty przykład prowadzi do wniosku, że mechanika kwantowa nie jest teorią lokalną, jeśli chodzi o pomiary. Ta nielokalność nie pozwala jednak na natychmiastową transmisję informacji. W każdym pojedynczym pomiarze spinów protonów nie możemy stwierdzić, czy spin elektronów został zmierzony wcześniej. Aby odkryć ten nielokalny charakter mechaniki kwantowej, konieczne jest przeprowadzenie serii eksperymentów dotyczących tego samego stanu.

Obliczmy teraz współczynnik korelacji $E(\alpha, \beta)$. Zaczniemy od średnich

$$\begin{aligned} \langle 0 | S_\alpha^e | 0 \rangle &= \frac{1}{2} \langle e : + | S_\alpha^e | e : + \rangle + \frac{1}{2} \langle e : - | S_\alpha^e | e : - \rangle \\ &= \frac{1}{2} (\cos \alpha - \cos \alpha) = 0 \end{aligned} \quad (36)$$

gdzie zastosowaliśmy (21) i (22) dla $\theta = 0$. Taki sam rezultat otrzymujemy dla protonu

$$\langle 0 | S_\beta^p | 0 \rangle = 0. \quad (37)$$

Obliczmy teraz

$$\begin{aligned} \langle 0 | S_\alpha^e \otimes S_\beta^p | 0 \rangle &= \frac{1}{2} (\langle + | S_\alpha^e | + \rangle \langle - | S_\beta^p | - \rangle - \langle + | S_\alpha^e | - \rangle \langle - | S_\beta^p | + \rangle \\ &\quad - \langle - | S_\alpha^e | + \rangle \langle + | S_\beta^p | - \rangle + \langle - | S_\alpha^e | - \rangle \langle + | S_\beta^p | + \rangle) \\ &= \frac{1}{8} 2 (-\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) \\ &= -\frac{1}{4} \cos(\alpha - \beta), \end{aligned} \quad (38)$$

gdzie użyliśmy (21) – (23). Zatem

$$E(\alpha, \beta) = \frac{-\frac{1}{4} \cos(\alpha - \beta)}{\sqrt{\frac{1}{4} \frac{1}{4}}} = -\cos(\alpha - \beta). \quad (39)$$

4 Prosty model zmiennych ukrytych

Zaproponujemy tutaj prosty model zmiennych ukrytych. Założmy, że po rozpadzie układ znajduje się w stanie iloczynowym (sfaktoryzowanym)

$$|e : +\rangle_\theta |p : -\rangle_\theta, \quad (40)$$

jednakże kierunek $\vec{n}_\theta$ zmienia się z pomiaru na pomiar. W tym przypadku kąt θ jest zmienną ukrytą. Zakładając, że wszystkie kierunki θ są równie prawdopodobne, definiujemy teraz wartość oczekiwaną obserwabli $\mathcal{O}$ jako

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} {}_\theta \langle p : - | {}_\theta \langle e : + | \mathcal{O} | e : + \rangle_\theta | p : - \rangle_\theta. \quad (41)$$

Obliczmy najpierw wartość oczekiwaną spinu elektronu względem osi $\vec{n}_\alpha$

$$\langle S_\alpha^e \rangle = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \frac{1}{2} \cos(\theta - \alpha) = 0 \quad (42)$$

tak jak w przypadku stanu singletowego (36). To samo dotyczy spinu protonu. Dlatego nasz prosty model zmiennych ukrytych odtwarza w tym przypadku wyniki mechaniki kwantowej. W przypadku korelacji podwójnej otrzymujemy jednak inny wynik:

$$\begin{aligned} \langle S_\alpha^e \otimes S_\beta^p \rangle &= - \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \frac{1}{2} \cos(\theta - \alpha) \frac{1}{2} \cos(\theta - \beta) \\ &= - \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} (\cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \sin \alpha) (\cos \theta \cos \beta + \sin \theta \sin \beta) \\ &= - \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} [\cos^2 \theta \cos \alpha \cos \beta + \cos \theta \sin \theta (\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta) + \sin^2 \theta \sin \alpha \sin \beta]. \end{aligned}$$

Biorąc pod uwagę, że

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \cos^2 \theta &= \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \sin^2 \theta = \frac{1}{2}, \\ \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \cos \theta \sin \theta &= 0 \end{aligned} \quad (43)$$

otrzymujemy

$$\langle S_\alpha^e \otimes S_\beta^p \rangle = -\frac{1}{8} (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) = -\frac{1}{8} \cos(\alpha - \beta). \quad (44)$$

Jest to wynik różny od (38)! Ostatecznie korelacja

$$E(\alpha, \beta) = \frac{-\frac{1}{8} \cos(\alpha - \beta)}{\sqrt{\frac{1}{4} \frac{1}{4}}} = -\frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) \quad (45)$$

jest dwukrotnie mniejsza od wyniku w mechanice kwantowej (39). Dlatego też poprzez pomiar E można odróżnić mechanikę kwantową od modelu zmiennych ukrytych. Powstaje pytanie, czy jest to tylko przypadkowa cecha naszego prostego modelu zmiennych ukrytych, czy też generalnie niemożliwe jest skonstruowanie modelu zmiennych ukrytych, który odtworzyłby E z mechaniki kwantowej.

5 Twierdzenie Bella

W 1965 roku Bell¹ udowodnił, że rozbieżność między mechaniką kwantową a teorią zmiennych ukrytych ma charakter bardzo ogólny. Rozważmy teorię zmiennych ukrytych (λ) scharakteryzowaną przez dwie funkcje

$$A(\lambda, \vec{n}_\alpha) = \pm \frac{1}{2}, \quad B(\lambda, \vec{n}_\beta) = \pm \frac{1}{2} \text{ w zależności od } \lambda \quad (46)$$

odpowiadające odpowiednio spinowi elektronu i protonu z poprzedniego rozdziału. Należy zauważyć, że B nie zależy od $\vec{n}_\alpha$, a A nie zależy od $\vec{n}_\beta$. To wymaganie *lokalności* jest niezbędne do dalszej dyskusji. Przyjmijmy, że λ jest rozłożone zgodnie z rozkładem prawdopodobieństwa $P(\lambda) \geq 0$ tak, że

$$\int d\lambda P(\lambda) = 1 \quad (47)$$

oraz

$$\begin{aligned} \langle S_\alpha^e \rangle &= \int d\lambda P(\lambda) A(\lambda, \vec{n}_\alpha) = 0, \\ \langle S_\beta^p \rangle &= \int d\lambda P(\lambda) B(\lambda, \vec{n}_\beta) = 0 \end{aligned} \quad (48)$$

tak, aby być w zgodzie z (36), (37) i (42). Zatem w ramach teorii ukrytych zmiennych

$$E(\alpha, \beta) = 4 \int d\lambda P(\lambda) A(\lambda, \vec{n}_\alpha) B(\lambda, \vec{n}_\beta). \quad (49)$$

Zdefiniujemy teraz wielkość S

$$S = E(\alpha, \beta) + E(\alpha, \beta') + E(\alpha', \beta') - E(\alpha', \beta) \quad (50)$$

¹John Stewart Bell (1928 – 1990) północnoirlandzki fizyk teoretyk związany z CERNem. W 2022 roku Nagrodę Nobla w dziedzinie fizyki otrzymali Alain Aspect, John Clauser i Anton Zeilinger za prace nad nierównościami Bella i eksperymentalnym potwierdzeniem twierdzenia Bella.

i udowodnimy, że w teorii zmiennych ukrytych dla dowolnych kątów $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ zachodzi

$$|S| \leq 2. \quad (51)$$

Równanie (51) nosi nazwę nierówności Bella. Pokażemy, że w mechanice kwantowej dla pewnych wartości kątów $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ może zajść $|S| > 2$.

Pokażmy najpierw, że przed wykonaniem całki po λ zachodzi

$$s(\lambda) = A(\lambda, \alpha)B(\lambda, \beta) + A(\lambda, \alpha)B(\lambda, \beta') + A(\lambda, \alpha')B(\lambda, \beta') - A(\lambda, \alpha')B(\lambda, \beta) = \pm \frac{1}{2}. \quad (52)$$

Rzeczywiście

$$s(\lambda) = A(\lambda, \alpha) \underbrace{[B(\lambda, \beta) + B(\lambda, \beta')]}_{\pm 1 \text{ lub } 0} + A(\lambda, \alpha') \underbrace{[B(\lambda, \beta') - B(\lambda, \beta)]}_{0 \text{ lub } \pm 1}. \quad (53)$$

Zauważmy, że A jest równe albo $1/2$ albo $-1/2$. Zatem kiedy w pierwszym członie $[\dots] \neq 0$, to nawias kwadratowy w drugim członie znika i zachodzi

$$-\frac{1}{2} \leq \int d\lambda P(\lambda) A(\lambda, \alpha) [B(\lambda, \beta) + B(\lambda, \beta')] \leq \frac{1}{2}, \quad (54)$$

a kiedy w drugim członie $[\dots] \neq 0$, to nawias kwadratowy w pierwszym członie znika i zachodzi

$$-\frac{1}{2} \leq \int d\lambda P(\lambda) A(\lambda, \alpha') [B(\lambda, \beta') - B(\lambda, \beta)] \leq \frac{1}{2}. \quad (55)$$

Ponieważ E ma mianownik $1/4$

$$S = 4 \int d\lambda P(\lambda) s(\lambda) \quad (56)$$

i otrzymujemy wynik z równania (51).

W mechanice kwantowej na podstawie równania (45)

$$S = -\cos(\underbrace{\alpha - \beta}_{=\theta_1}) - \cos(\underbrace{\alpha - \beta'}_{=-\theta_2}) - \cos(\underbrace{\alpha' - \beta'}_{=\theta_3}) + \cos(\underbrace{\alpha' - \beta}_{=\theta_4}). \quad (57)$$

Zauważmy

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \alpha - \beta + \beta' - \alpha + \alpha' - \beta' = \alpha' - \beta = \theta_4. \quad (58)$$

Zatem

$$S = -\cos \theta_1 - \cos \theta_2 - \cos \theta_3 + \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3). \quad (59)$$

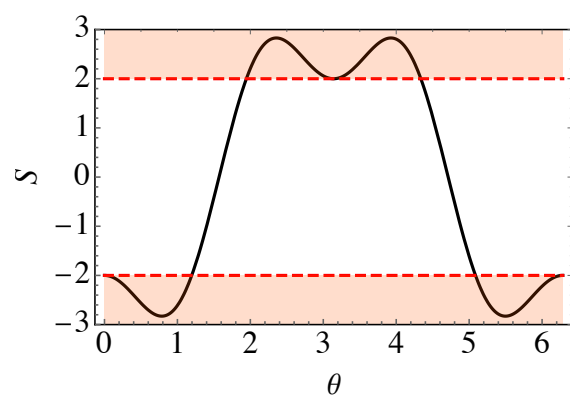
Wyberzmy teraz szczególną postać kątów $\theta_{1,2,3}$:

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 \stackrel{\text{df}}{=} \theta. \quad (60)$$

Wówczas

$$S(\theta) = -3 \cos \theta + \cos(3\theta). \quad (61)$$

Wykres $S(\theta)$ w funkcji θ pokazany jest na rysunku poniżej. Widzimy, że dla pewnych wartości kąta θ mechanika kwantowa przewiduje $|S| > 2$ w sprzeczności z nierównością Bella.



na podstawie J.-L. Basdevant, L. Dalibard *The Quantum Mechanics Solver*