Zadania dodatkowe

Znajdź faktoryzacje *LDL* macierzy

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \tag{1a}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \tag{1b}$$

oraz macierze odwrotne do nich.

Rozwiązanie: Faktoryzację *LDL* da się znaleźć dla macierzy symetrycznych. Obie macierze (1a),(1b) mają tę własność, a zatem problem jest dobrze postawiony. Faktoryzacja *LDL* symetrycznej macierzy 3×3 ma postać

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{L}^T = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U} \tag{2a}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & l_{21} & l_{31} \\ 0 & 1 & l_{32} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_1 & d_1\, l_{21} & d_1\, l_{31} \\ 0 & d_2 & d_2\, l_{32} \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix} \tag{2b}$$

Faktoryzacja *LDL* jest zatem szczególną postacią faktoryzacji *LU*. Można ją znaleźć za pomocą algorytmu Doolittle'a (nie da się wykonywać pivotów!), przy czym nie trzeba wyliczać elementów ponaddiagonalnych. A konkretnie, należy kolejno (kolumnami od lewej, a w każdej kolumnie w dół) rozwiązać następujące równania:

$$\begin{array}{lll} d_1 = a_{11} & & \\ d_1 l_{21} = a_{21} & d_1 l_{21}^2 + d_2 = a_{22} & \\ d_1 l_{31} = a_{31} & d_1 l_{21} l_{31} + d_2 l_{32} = a_{32} & d_1 l_{31}^2 + d_2 l_{32}^2 + d_3 = a_{33} \end{array} \tag{3}$$

Jest sześć równań i jeśli rozwiązywać je w podanej kolejności, w każdym równaniu jest tylko jedna niewiadoma.

Podstawiając elementy macierzy (1a),(1b) otrzymujemy, odpowiednio,

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \tag{4a}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4b}$$

Elementy $l_{ij}, i > j$, są podane w sposób jawny. Elementy d_i odczytujemy z przekątnej drugich macierzy po prawej stronie. To kończy pierwszą część zadania.

W drugiej części zadania trzeba znaleźć macierze odwrotne, czyli macierze $\mathbf{A}^{-1}$ spełniające

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbb{I}\,. \tag{5}$$

Zgodnie z zasadami mnożenia macierzowego, możemy powyższe równanie przedstawić jako *trzy* układy równań liniowych:

$$\mathbf{A}\mathbf{w}_1 = \mathbf{e}_1\,, \qquad \mathbf{A}\mathbf{w}_2 = \mathbf{e}_2\,, \qquad \mathbf{A}\mathbf{w}_3 = \mathbf{e}_3\,, \tag{6}$$

gdzie wektory $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ są kolejnymi kolumnami macierzy jednostkowej $\mathbb{I}$, czyli kolejnymi wersorami kartezjańskiego układu współrzędnych, a nieznane wektory $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$ są kolejnymi kolumnami macierzy odwrotnej $\mathbf{A}^{-1}$. Wszystkie równania (6) mają taką samą macierz, różniąc się jedynie kolumnami wyrazów wolnych.

Ponieważ znamy faktoryzację *LDL*, możemy jej użyć do rozwiązywania równań postaci

$$\mathbf{A}\mathbf{w} = \mathbf{e} \tag{7}$$

$$\mathbf{L}\mathbf{U}\mathbf{w} = \mathbf{e}\,, \tag{8}$$

gdzie $\mathbf{U} = \mathbf{D}\mathbf{L}^T$. Ostatnie z tych równań jest równoważne układowi

$$\mathbf{L}\mathbf{z} = \mathbf{e} \tag{9a}$$

$$\mathbf{U}\mathbf{w} = \mathbf{z} \tag{9b}$$

gdzie $\mathbf{z}$ jest pomocniczym wektorem.

Biorąc dane z (4a) otrzymujemy

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \tag{10a}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \tag{10b}$$

Wektor $\mathbf{w}_1$ jest pierwszą kolumną macierzy odwrotnej do macierzy (1a).

Następnie

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \tag{11a}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \tag{11b}$$

Wektor $\mathbf{w}_2$ jest drugą kolumną macierzy odwrotnej do macierzy (1a).

Wreszcie

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{12a}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} \tag{12b}$$

Wektor $\mathbf{w}_3$ jest trzecią kolumną macierzy odwrotnej do macierzy (1a). Ostatecznie stwierdzamy, że

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}. \tag{13}$$

Odwrotnością macierzy (1a) jest macierz (1b).

Postępując, jak wyżej, ale korzystając z faktoryzacji (4b), znajdziemy macierz odwrotną do macierzy (1b). Oczywiście jest to macierz (1a).

PFG