1. Niech
$$f(x) = (x-a)^k \cdot g(x)\,, \tag{1}$$
gdzie $g(x)$ jest różniczkowalna w otoczeniu a oraz $g(a) \neq 0$. Udowodnij, że metoda Newnona jest zbieżna do miejsca zerowego $x = a$ i znajdź tempo tej zbieżności.

2. Niech $a \in \mathbb{R}\colon a > 0$. Bez posługiwania się pojęciem pochodnej[1] udowodnij, że iteracja
$$z_{n+1} = \frac{1}{2}\left(z_n + \frac{a}{z_n}\right) \tag{2}$$
jest zbieżna do $\sqrt{a}$ dla wszystkich dodatnich punktów początkowych i do $-\sqrt{a}$ dla wszystkich ujemnych punktów początkowych.

3. Znajdź równanie charakterystyczne macierzy
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \tag{3}$$
Wskazówka: Proszę zastosować rozwinięcie Laplace'a według pierwszej kolumny.

4. Znajdź minimum funkcji Rosenbrocka
$$f(x,y) = (1-x)^2 + 100(y-x^2)^2\,. \tag{4}$$

5. Rozwiń funkcję Rosenbrocka wokół minimum w szereg Taylora do drugiego rzędu.

PFG

[1] Skorzystanie z metody Newtona oznacza odwołanie się do pojęcia pochodnej.