

1. Korzystając ze wzoru interpolacyjnego Lagrange'a, znajdź równanie paraboli przechodzącej przez punkty  $(x_1, f_1), (x_2, f_2), (x_3, f_3)$  ( $x_1 \neq x_2, x_1 \neq x_3, x_2 \neq x_3$ ). Znajdź położenie wierzchołka tej paraboli.
2. *Interpolacja Hermite'a*. Pokazać, że wielomian interpolacyjny Hermite'a zgadza się ze stabilizowaną funkcją i jej pochodną w węzłach.
3. Podać, dla jakich liczb  $a, b, c, d$  funkcja

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x + 1 & x \in [0, 1] \\ a + b(x-1) + c(x-1)^2 - \frac{1}{2}(x-1)^3 & x \in [1, d] \end{cases} \quad (1)$$

tworzy naturalny splajn kubiczny na przedziale  $[0, d]$ .

4. W każdym przedziale przedziale  $[x_j, x_{j+1}]$  interpolujemy za pomocą wzoru

$$y(x) = A(x)f_j + B(x)f_{j+1} + C(x)\xi_j'' + D(x)\xi_{j+1}'', \quad (2)$$

gdzie

$$A = \frac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j}, \quad C = \frac{1}{6}(A^3 - A)(x_{j+1} - x_j)^2, \quad (3a)$$

$$B = \frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j}, \quad D = \frac{1}{6}(B^3 - B)(x_{j+1} - x_j)^2. \quad (3b)$$

Pokazać, że  $y(x_j) = f_j, y(x_{j+1}) = f_{j+1}, y''(x_j) = \xi_j'', y''(x_{j+1}) = \xi_{j+1}''$ . Żądając ciągłości pierwszej pochodnej  $y(x)$  w węzłach, wyprowadzić układ równań na nieznanne wielkości  $\xi_j''$ .

5. *Interpolacja wymierna, algorytm Floatera i Hormanna*. Wylicz wagi  $\{w_i\}$  dla  $n = 65$  węzłów i parametru  $d = 3$ .