1. Nierozwiązane zadania z poprzednich zestawów.

2. Znajdź wartości własne i odpowiadające im wektory własne macierzy

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -i \\ 1 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 1 \\ i & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

3. Niech $x \in [-1, 1]$. Definiujemy wielomiany Czebyszewa jako

$$T_n(x) = \cos\left(n \arccos x\right). \tag{2a}$$

   Znajdź jawne wyrażenia na $T_0(x), T_1(x)$, a następnie, korzystając z tożsamości trygonometrycznych, pokaż, że dla $n \geqslant 2$ wielomiany Czebyszewa spełniają relację

$$T_n(x) = 2x\, T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)\,. \tag{2b}$$

   Wskazówka: $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$, $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$.

4. Korzystając z wyników poprzedniego zadania, udowodnij, że wielomiany Czebyszewa są wielomianami ☺, dzięki czemu ich definicję bardzo łatwo jest uogólnić na cały zbiór $\mathbb{C}$.

5. Oblicz

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \tag{3}$$

PFG