1. Dana jest macierz o strukturze

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 & d_1 & 0 & \dots & & & & & \\ b_1 & a_2 & b_2 & 0 & d_2 & 0 & \dots & & & & \\ 0 & b_2 & a_3 & b_3 & 0 & d_3 & 0 & \dots & & & \\ d_1 & 0 & b_3 & a_4 & b_4 & 0 & d_4 & 0 & \dots & & \\ 0 & d_2 & 0 & b_4 & a_5 & b_5 & 0 & d_5 & 0 & \dots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ & & & & & \dots & 0 & d_{n-3} & 0 & b_{n-1} & a_n \end{bmatrix} \tag{1}$$

   Niewypełnione elementy są zerami. Przyjmijmy, że macierz ta jest dodatnio określona. Zaproponuj i zapisz (w kodzie lub pseudokodzie) *efektywny* algorytm obliczania $\mathbf{Ax}$, gdzie $\mathbf{A}$ jest macierzą (1), a $\mathbf{x}$ jakimś wektorem.

2. Dla macierzy (1) zaproponuj i zapisz (w kodzie lub pseudokodzie) *efektywny* algorytm realizujący metodę Gaussa-Seidela.

3. *Metoda gradientów sprzężonych*. Niech macierz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N\times N}$ będzie symetryczna i dodatnio określona. Niech $\mathbf{r}_1 \in \mathbb{R}^N$ będzie dowolnym wektorem takim, że $||\mathbf{r}_1|| \neq 0$ i niech $\mathbf{p}_1 = \mathbf{r}_1$. Definiujemy następującą iterację:

$$\alpha_k = \frac{\mathbf{r}_k^T\mathbf{r}_k}{\mathbf{p}_k^T\mathbf{A}\mathbf{p}_k}\,, \tag{2a}$$
$$\mathbf{r}_{k+1} = \mathbf{r}_k - \alpha_k\mathbf{A}\mathbf{p}_k\,, \tag{2b}$$
$$\beta_k = \frac{\mathbf{r}_{k+1}^T\mathbf{r}_{k+1}}{\mathbf{r}_k^T\mathbf{r}_k}\,, \tag{2c}$$
$$\mathbf{p}_{k+1} = \mathbf{r}_{k+1} + \beta_k\mathbf{p}_k\,. \tag{2d}$$

   Udowodnij indukcyjnie, że dla każdych i, j, $i > j$, zachodzi

$$\mathbf{r}_i^T\mathbf{r}_j = 0\,, \tag{3a}$$
$$\mathbf{r}_i^T\mathbf{p}_j = 0\,, \tag{3b}$$
$$\mathbf{p}_i^T\mathbf{A}\mathbf{p}_j = 0\,. \tag{3c}$$

   Gdzie w dowodzie wykorzystuje się symetrię, gdzie zaś dodatnią określoność macierzy $\mathbf{A}$?

   Wskazówka: Dowód należy przeprowadzić indukcyjnie. Krok indukcyjny polega na tym, iż zakładamy, że pierwsze $k < N$ wektorów $\mathbf{r}_j, \mathbf{p}_j$ spełnia (3). Następnie generujemy wektory $\mathbf{r}_{k+1}, \mathbf{p}_{k+1}$. Trzeba pokazać, że one także spełniają (3) korzystając z tego, że poprzednie wektory je spełniają. Dowód ten jest prosty, ale na ćwiczeniach stracimy na niego mnóstwo czasu, jeśli nie *spróbujecie* go Państwo przeprowadzić samodzielnie.

4. Dane jest równanie liniowe

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}\,, \tag{4}$$

   przy czym macierz $\mathbf{A}$ spełnia założenia poprzedniego zadania. Niech $\mathbf{x}_1$ będzie pierwszym (być może złym) przybliżeniem rozwiązania równania (4) i niech $\mathbf{r}_1 = \mathbf{b} - \mathbf{Ax}_1$. W każdym kroku iteracji (2) definiujemy

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{p}_k \,. \tag{5}$$

Znajdźć związek pomiędzy $\mathbf{x}_k$ a $\mathbf{r}_k$. Pokaż, że $\mathbf{x}_{N+1}$ jest ścisłym rozwiązaniem równania (4) (w arytmetyce dokładnej).

PFG