# Metody numeryczne

# 11a. Minimalizacja: funkcje jednej zmiennej

# Wykorzystanie pochodnych i interpolacji Hermite'a

P. F. Góra

https://zfs.fais.uj.edu.pl/pawel_gora

13 stycznia 2026

## Wykorzystanie pochodnych

Zajmujemy się minimalizacją funkcji jednej zmiennej.

Jeżeli funkcja $f$ jest różniczkowalna i jeżeli obliczenie jej pochodnej jest łatwe, możemy posłużyć się pochodną dla przyspieszenia zbieżności. W przypadku funkcji jednej zmiennej, w przeciwieństwie do funkcji wielu zmiennych, korzystanie z pochodnych nie powoduje znacznego przyspieszenia — niekiedy, zwłaszcza daleko od minimum, metoda zachowuje się *gorzej*, niż metoda złotego podziału.

Najprostszą metodą jest dokonanie interpolacji liniowej pochodnych* w *skraj-*

*Założenie, że pochodną można przybliżyć funkcją liniową jest równoważne założeniu, że funkcję można przybliżyć parabolą, jednak numeryczne wyniki mogą być różne — na niekorzyść metody wykorzystującej pochodne.

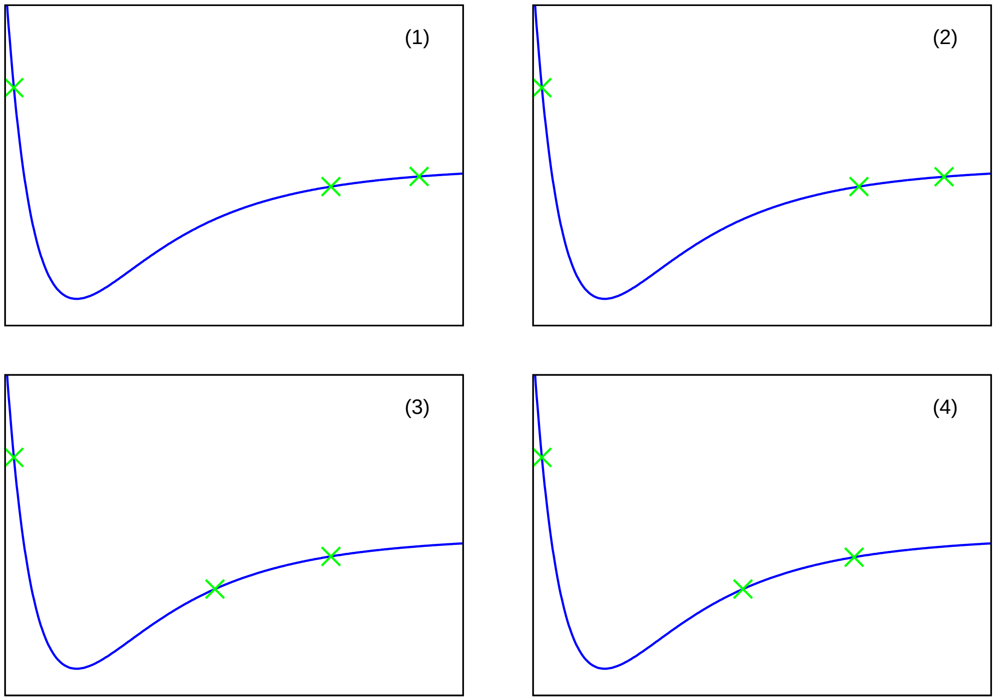
*nych* punktach przedziału[†]. Jako punkt $d$ bierzemy miejsce zerowe funkcji interpolującej pochodną:

$$d = \frac{af'_c - cf'_a}{f'_c - f'_a}\,, \tag{1}$$

po czym, jak poprzednio, zawężamy przedział posługując się tymi samymi warunkami, co w metodzie Brenta lub złotego podziału. Jeżeli metoda wpada w stagnację, wykonujemy *bisekcję* przedziału. Numeryczne własności tej metody są na ogół gorsze niż metody Brenta.

[†]Przy założeniu, że w skrajnych punktach pochodna ma przeciwny znak. Jeśli założenie to nie jest spełnione, wyinterpolowane miejsce zerowe pochodnej wypadnie poza przedziałem.

## Przykład




Cztery kroki metody wykorzystującej pochodną. Skrajny prawy punkt w kroku drugim jest prawie taki sam, jak początkowy skrajny punkt, trzeba więc wykonać bisekcję (trzeci panel). Sytuacja powtarza się w kolejnym kroku. Metoda, dla tego przybliżenia początkowego, jest wolniej zbieżna niż metoda złotego podziału.

## Wykorzystanie interpolacji Hermite'a

Można też użyć bardziej złożonej metody wykorzystującej pochodne: Korzystając z interpolacji Hermite'a, konstruujemy wielomian trzeciego stopnia zgadzający się z badaną funkcją i jej pochodną w skrajnych punktach przedziału, po czym jako punkt $d$ bierzemy minimum tego wielomianu leżące w przedziale $[a, c]$, o ile takowe istnieje. Metoda ta może mieć podobne wady, co uprzednio omawiana metoda, a w dodatku cechuje się wyraźnie większą złożonością obliczeniową.

Metoda Brenta i metody wykorzystujące pochodne przyspieszają zbieżność jeżeli funkcja daje się dobrze przybliżyć za pomocą rozwinięcia Taylora do rzędu drugiego.