

Metod numeryczne

8b. Uzupełnienie: Przybliżenia Padé

P. F. Góra

https://zfs.fais.uj.edu.pl/pawel_gora

2025

Aproksymacja ciągła

Termin “aproksymacja” ma dwa znaczenia. Po pierwsze, może chodzić o **aproksymację punktową**, omawianą w jednym z poprzednich wykładów.

Po drugie, możemy mówić o **aproksymacji ciągłej**: Mając ustaloną funkcję $g(x)$, której sposób obliczania jest trudny, skonstruować inną funkcję, która będzie w pewnym sensie bliska funkcji wyjściowej, a jednocześnie obliczeniowo prostsza.

Spośród wszystkich (licznych!) zagadnień aproksymacji ciągłej, omówimy tylko przybliżenia Padé.

Przypuśmy, że znamy wartości pewnej funkcji $g(x)$ i jej pochodnych do rzędu N w zerze* i na tej podstawie chcemy skonstruować przybliżenie tej funkcji w pewnym przedziale zawierającym zero, tak, aby przybliżenie to zgadzało się z funkcją i jej N pochodnymi w zerze.

Najprostszym sposobem jest skonstruowanie rozwinięcia Maclaurina do rzędu N . Otrzymujemy w ten sposób wielomian, który co prawda spełnia wymagania w otoczeniu zera, ale przybliżenie wielomianowe zazwyczaj szybko załamuje się już w niewielkiej odległości od zera. Lepsze byłoby przybliżenie wymierne.

*Jeżeli wartości te znamy w jakimś innym punkcie, możemy za pomocą prostej zmiany zmiennych sprowadzić ten punkt do zera.

Niech poszukiwane przybliżenie ma postać

$$R_{mk}(x) = \frac{P_m(x)}{Q_k(x)} = \frac{\sum_{j=0}^m a_j x^j}{\sum_{j=0}^k b_j x^j}, \quad (1)$$

przy czym $b_0 = 1$ i niech szeregiem Maclaurina aproksymowanej funkcji będzie

$$g(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j. \quad (2)$$

Przyjmijmy, że $m + k + 1 = N + 1$, czyli tyle, ile wyrazów zawiera szereg Maclaurina funkcji $g(x)$ do rzędu N . Obliczamy

$$g(x) - R_{mk}(x) = \frac{\left(\sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j\right) \left(\sum_{j=0}^k b_j x^j\right) - \sum_{j=0}^m a_j x^j}{\sum_{j=0}^k b_j x^j}. \quad (3)$$

Funkcja $g(x)$ wraz z pochodnymi do rzędu N będzie się zgadzać z przybliżeniem (1), jeżeli w liczniku prawej strony równania (3) **najniższy nieznikający wyraz będzie proporcjonalny do x^{N+1}** . Otrzymujemy stąd warunki

$$\sum_{j=0}^k c_{N-s-j} b_j = 0 \quad s = 0, 1, \dots, N - m - 1; \quad c_j = 0 \text{ dla } j < 0 \quad (4a)$$

$$\sum_{j=0}^r c_{r-j} b_j = a_r \quad r = 0, 1, \dots, m; \quad b_j = 0 \text{ dla } j > k \quad (4b)$$

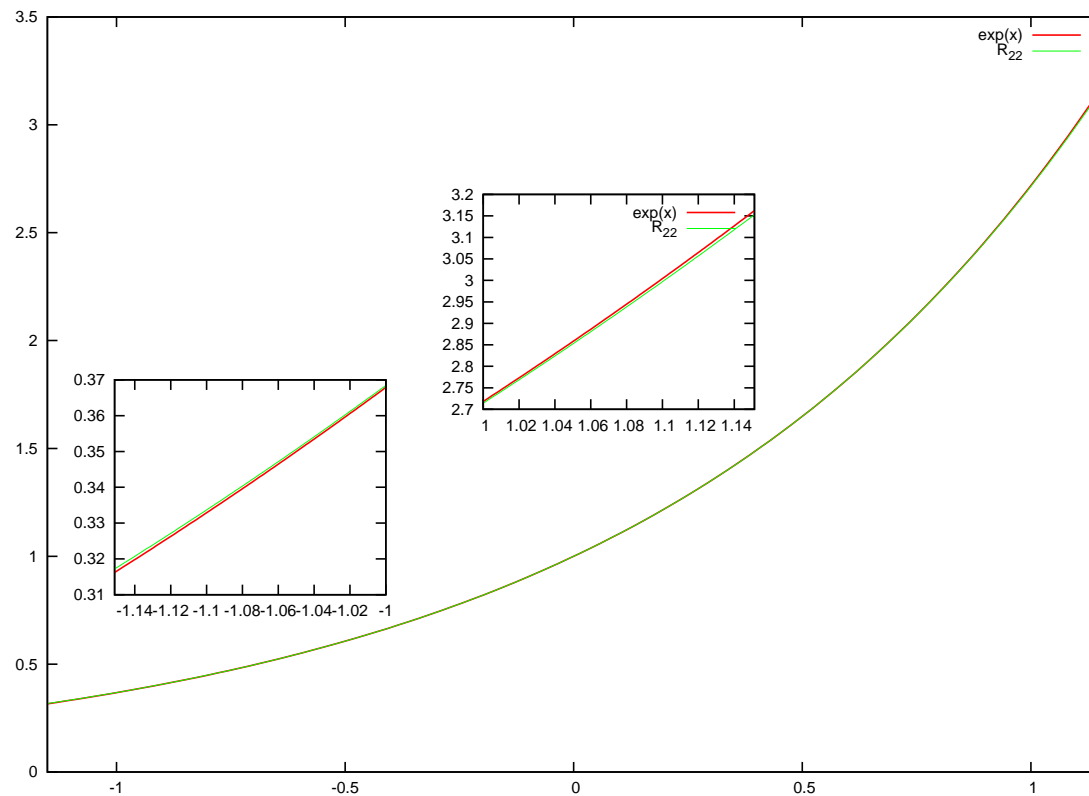
(4) stanowi **układ $N+1$ równań liniowych** na $N+1$ współczynników a_r, b_j .

Przykład

Przybliżeniem Padé $R_{22}(x)$ funkcji e^x jest

$$R_{22}(x) = \frac{12 + 6x + x^2}{12 - 6x + x^2}. \quad (5)$$

Błąd tego przybliżenia w przedziale $[-\frac{1}{2} \ln 10, \frac{1}{2} \ln 10]$ nie przekracza 0.01.



Funkcja e^x i jej przybliżenie (5).

Uwaga!

Niekiedy poszukiwane przybliżenia Padé nie istnieją. Na przykład funkcja $\cosh x$ jest parzysta, jej rozwinięcie Maclaurina też jest parzyste, więc przybliżenia nie spełniające warunku parzystości nie mogą istnieć. Przybliżeniami tej funkcji o $m + n + 1 = 5$ są

$$R_{40} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 \quad (6a)$$

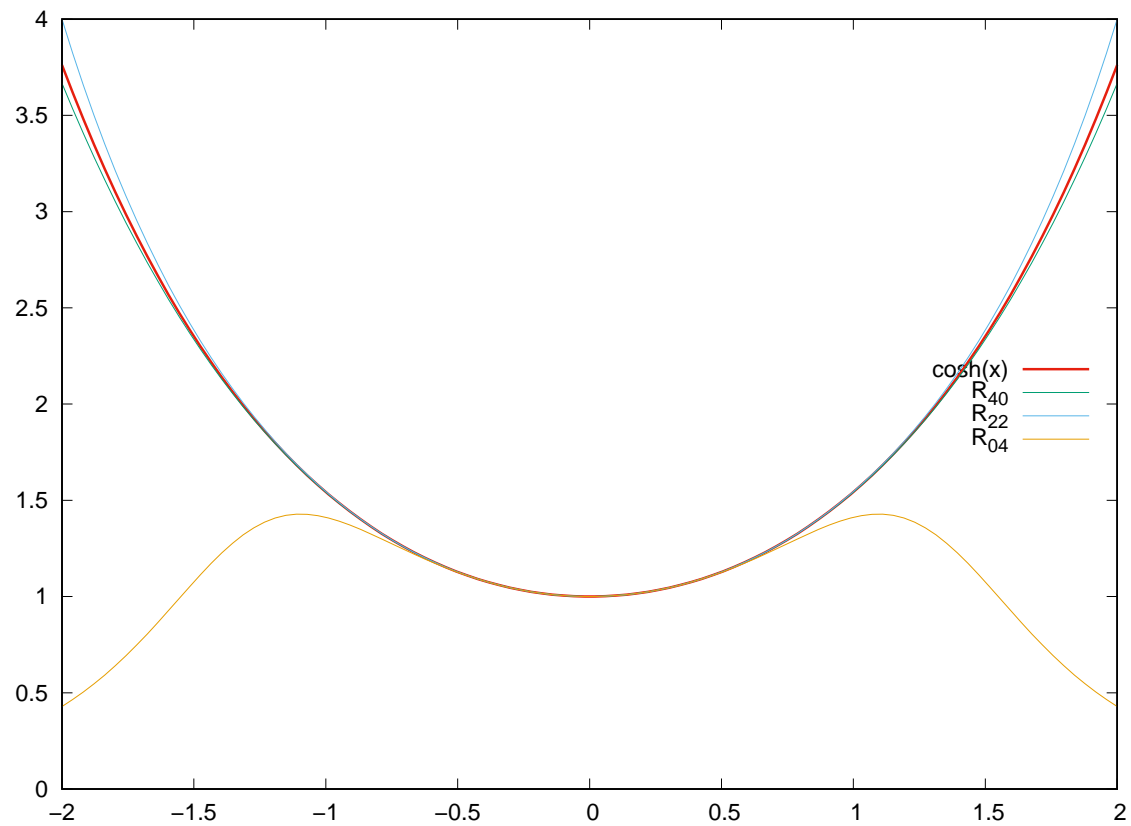
$$R_{22} = \frac{12 + 5x^2}{12 - x^2} \quad (6b)$$

$$R_{04} = \frac{24}{5x^4 - 12x^2 + 24} \quad (6c)$$

ale przy próbie znalezienia R_{31} otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4\right) (b_1x + 1) - (a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) \\ &= \frac{1}{24}b_1x^5 + \frac{1}{24}x^4 + \left(\frac{1}{2}b_1 - a_3\right)x^3 + \left(\frac{1}{2} - a_2\right)x^2 + (b_1 - a_1)x + a_0 \end{aligned} \quad (7)$$

Współczynnika przy x^4 nie można usunąć przez odpowiedni dobór b_j, a_r . Podobny problem napotkalibyśmy przy próbie wyprowadzenia R_{13} . Te dwa przybliżenia, R_{31} i R_{13} , funkcji $\cosh x$ nie istnieją.



Funkcja $\cosh x$ i jej przybliżenia Padé

Przybliżenie Czebyszewa

Okazuje się, że lepsze przybliżenie uzyskuje się biorąc zamiast (1) iloraz wielomianów Czebyszewa:

$$C_{mk}(x) = \frac{\sum_{j=0}^m a_j T_j(x)}{\sum_{j=0}^k b_j T_j(x)}, \quad (8)$$

gdzie $T_j(x)$ jest j -tym wielomianem Czebyszewa. Dla $x \in (-1, 1)$ są one zdefiniowane jako

$$T_j(x) = \cos(j \arccos x) \quad (9)$$

i poprzez przedłużenie analityczne poza tym przedziałem. $T_j(x)$ jest wielomianem stopnia j , o najmniejszym wahaniu w przedziale $[-1, 1]$.

Niech funkcja $g(x)$ posiada rozwinięcie Czebyszewa

$$g(x) = \frac{1}{2}c_0 + \sum_{j=1}^{\infty} c_j T_j(x). \quad (10)$$

Współczynniki tego rozwinięcia otrzymujemy obliczając

$$c_j = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{g(x)T_j(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx. \quad (11)$$

(*Numerycznie* należy obliczać taką całkę za pomocą kwadratur Gaussa-Czebyszewa, nieomówionych w tym kursie.)

Postępując jak poprzednio i korzystając z rozwinięcia (10), obliczamy

$$g(x) - C_{mk}(x) \quad (12)$$

żądając, aby w liczniku współczynniki przy $T_j(x)$ zniknęły tożsamościowo dla $j = 0, 1, \dots, N$. Otrzymujemy stąd układ równań

$$a_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^k b_i c_i \quad (13a)$$

$$a_r = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^k b_i (c_{|r-i|} + c_{r+i}) \quad (13b)$$

($a_{r>m} \equiv 0$).

Przybliżenia Czebyszewa są lepsze od przybliżeń Padé, gdyż błąd tych pierwszych zachowuje się bardziej regularnie w całym przedziale.