Metody numeryczne

6a. Interpolacja na płaszczyźnie

P. F. Góra

`https://zfs.fais.uj.edu.pl/pawel_gora`

25 listopada 2025

Interpolacja na płaszczyźnie — splajny bikubiczne

Przypuśćmy, że pewną funkcję dwu zmiennych, $f(x,y)$, mamy stabelaryzowaną w węzłach dwuwymiarowej siatki kwadratowej:

$$
\begin{array}{ccccc}
f_{11}{=}f(x_1,y_1) & f_{21}{=}f(x_2,y_1) & f_{31}{=}f(x_3,y_1) & \cdots & f_{n1}{=}f(x_n,y_1) \\
f_{12}{=}f(x_1,y_2) & f_{22}{=}f(x_2,y_2) & f_{32}{=}f(x_3,y_2) & \cdots & f_{n2}{=}f(x_n,y_2) \\
f_{13}{=}f(x_1,y_3) & f_{23}{=}f(x_2,y_3) & f_{31}{=}f(x_3,y_3) & \cdots & f_{n1}{=}f(x_n,y_3) \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
f_{1n}{=}f(x_1,y_n) & f_{2n}{=}f(x_2,y_n) & f_{3n}{=}f(x_3,y_n) & \cdots & f_{n1}{=}f(x_n,y_n)
\end{array}
\tag{1}
$$

“Wiersze” tej siatki odpowiadają ustalonym wartościom zmiennej y.
“Kolumny” tej siatki odpowiadają ustalonym wartościom zmiennej x.

Przypuśćmy, że chcemy znaleźć wartość funkcji $f(x^*, y^*)$, gdzie (x^*, y^*) jest wewnętrznym punktem siatki. W tym celu postępujemy jak następuje:

1. Przeprowadzamy splajn wzdłuż każdego "wiersza". W każdym wierszu wartość zmiennej y jest ustalona, więc jest to za każdym razem zwykły splajn jednowymiarowy. Każdy splajn pociąga koszt numeryczny rzędu $O(n)$, a zatem obliczenie splajnów wzdłuż wszystkich wierszy pociąga koszt rzędu $O(n^2)$.
2. Obliczamy wartość każdego z powyższych splajnów w punkcie $x = x^*$. W ten sposób dostajemy n wartości funkcji w punktach (x^*, y_1), (x^*, y_2), $\dots$, (x^*, y_n).
3. Przez powyższe punkty przeprowadzmy splajn w kierunku y (przy ustalonej wartości $x = x^*$) i wyliczamy wartość tego splajnu w punkcie (x^*, y^*). Wymaga to dodatkowych $O(n)$ operacji, zatem cały koszt jest zdominowany przez $O(n^2)$.