

Metody numeryczne

Uzupełnienie: Obroty Givensa

P. F. Góra

https://zfs.fais.uj.edu.pl/pawel_gora

2025

Transformacja Householdera służy do zerowania wielu składowych jakiegoś wektora. Jeżeli chcemy selektywnie wyzerować jakieś składowe — lub jeśli interesujący nas wektor ma jakąś szczególną postać — bardziej efektywne od transformacji Householdera będą *obroty Givensa*.

Niech x będzie pewnym wektorem i niech $y = G(i, j)x$. Składowe wektora y wynoszą

$$y_k = \begin{cases} cx_i + sx_j & k = i \\ -sx_i + cx_j & k = j \\ x_k & \text{poza tym} \end{cases} \quad (2)$$

Zażądajmy, aby $y_j = 0$. Widać, że musi zachodzić

$$c = \frac{x_i}{\sqrt{x_i^2 + x_j^2}}, \quad s = \frac{x_j}{\sqrt{x_i^2 + x_j^2}}. \quad (3)$$

Obrót Givensa (1) wraz z warunkami (3) zeruje j -tą składową wybranego wektora. Składowa i -ta przybiera wartość $\sqrt{x_i^2 + x_j^2}$.

Faktoryzacja QR macierzy trójdzielnej symetrycznej

Rozpatrzmy macierz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}$, trójdzielną symetryczną

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & & & & \\ b & d & e & & & \\ & e & f & g & & \\ & & g & h & l & \\ & & & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (4)$$

Zadziałajmy na nią macierzą Givensa taką, aby zerowała drugi element pierwszej kolumny

$$\mathbf{G}_1 = \begin{bmatrix} c_1 & s_1 & & & & \\ -s_1 & c_1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \dots \end{bmatrix} \quad (5)$$

Macierz A_1 mnożymy przez macierz Givensa

$$G_2 = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & c_2 & s_2 & & & \\ & -s_2 & c_2 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix} \quad (7)$$

dobraną tak, aby zerowała trzeci element drugiej kolumny macierzy A_1 . Pierwszy wiersz i pierwsza kolumna nie zmieniają się, podobnie jak wiersze począwszy od czwartego. W rezultacie macierz $A_2 = G_2 A_1 = G_2 G_1 A$ ma zera w poddiagonalnych miejscach dwu pierwszych kolumn. Ten krok także wymaga stałej, niezależnej od rozmiaru macierzy, liczby operacji.

W kolejnym kroku macierz A_2 mnożymy przez taką macierz Givensa, która wyzeruje czwarty element trzeciej kolumny. I tak dalej.

W ten sposób, po $N-1$ krokach, ponosząc koszt numeryczny $O(N)$ (stały koszt na krok, $\sim N$ kroków), otrzymujemy

$$\mathbf{G}_{N-1} \cdots \mathbf{G}_2 \mathbf{G}_1 \mathbf{A} = \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & & & & \\ & \bullet & \bullet & \bullet & & & \\ & & \bullet & \bullet & \bullet & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & \bullet & \bullet & \\ & & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & \bullet & \bullet \\ & & & & & & \bullet \end{bmatrix}, \quad (8a)$$

czyli

$$\mathbf{A} = \underbrace{\mathbf{G}_1^T \mathbf{G}_2^T \cdots \mathbf{G}_{N-1}^T}_{\mathbf{Q}} \mathbf{R} \quad (8b)$$

Macierz \mathbf{Q} jest ortogonalna. Macierz \mathbf{R} jest trójkątna górna (tak naprawdę ma ona tylko dwie niezerowe diagonale nad diagonalą główną). Widzimy, że (8b) jest faktoryzacją QR macierzy trójdzielnej symetrycznej.

Zastosowanie do rozwiązywania układu równan liniowych

Jeżeli chcemy użyć obrotów Givensa do rozwiązywania układu równań liniowych

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \quad (9)$$

gdzie \mathbf{A} jest trójdagonalną macierzą symetryczną, postępując jak poprzednio otrzymujemy kolejno

$$\mathbf{G}_1 \mathbf{Ax} = \mathbf{G}_1 \mathbf{b} \quad (10a)$$

$$\mathbf{G}_2 \mathbf{G}_1 \mathbf{Ax} = \mathbf{G}_2 \mathbf{G}_1 \mathbf{b} \quad (10b)$$

...

$$\mathbf{G}_{N-1} \cdots \mathbf{G}_2 \mathbf{G}_1 \mathbf{Ax} \equiv \mathbf{Rx} = \mathbf{G}_{N-1} \cdots \mathbf{G}_2 \mathbf{G}_1 \mathbf{b}. \quad (10c)$$

Oczywiście istotne jest tylko równanie (10c) — lewych stron poprzednich równań nie musimy wyliczać. Każde kolejne mnożenie po stronie prawej

wykonujemy w stałym czasie, a więc do postaci $\mathbf{R}\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{b}}$ dochodzimy w czasie $O(N)$. To równanie rozwiązujemy metodą *backsubstitution*, co, z uwagi na szczególną postać macierzy \mathbf{R} , także da się wykonać w czasie liniowym.

Przykład ten pokazuje, że możemy odnieść duży zysk na złożoności obliczeniowej, jeśli tylko dobierzemy odpowiedni algorytm odpowiadający strukturze — w tym wypadku rzadkości i symetryczności — macierzy.

Uwaga: Skumulowanej macierzy Givensa \mathbf{Q} nie musimy wyliczać w sposób jawny — gdybyśmy to chcieli zrobić, wymagałoby to $O(N^2)$ operacji.