Częściowe rozwiązania

Niech $\|\mathbf{x}\|$ będzie normą euklidesową wektora $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, a $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ będzie macierzą kwadratową. **Normą indukowaną** macierzy nazywam wielkość

$$\|\mathbf{A}\| = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|$$

Znajdź normy indukowane następujących macierzy (wskazówka: Zastosuj metodę czynników nieoznaczonych Lagrange'a):

1.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{1a}$$

Ponieważ norma euklidesowa jest funkcją wypukłą, zamiast normy możemy maksymalizować kwadrat normy. Pozbędziemy się w ten sposób pierwiastków, co uprości obliczenia i zapis, ale nie zmieni wyników.

Niech $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]^T$. Mamy

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_2 + 2x_3 \end{bmatrix} \tag{1b}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^2 = \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|^2 &= (2x_1 + x + 2)^2 + (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 + (x_2 + 2x_3)^2 \\ &= 5x_1^2 + 6x_2^2 + 5x_3^2 + 8x_1x_2 + 2x_1x_3 + 8x_2x_3 \end{aligned} \tag{1c}$$

Musimy zminimalizować wyrażenie (1c) przy warunku $\|\mathbf{x}\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$. W tym celu tworzę funkcjonał

$$\mathcal{L} = 5x_1^2 + 6x_2^2 + 5x_3^2 + 8x_1x_2 + 2x_1x_3 + 8x_2x_3 - \lambda\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1\right) \tag{1d}$$

λ jest czynnikiem nieoznaczonym. Teraz muszę policzyć pochodne cząstkowe $\partial\mathcal{L}/\partial x_1$, $\partial\mathcal{L}/\partial x_2$, $\partial\mathcal{L}/\partial x_3$ i przyrównać je do zera. Po uproszczeniu otrzymuję

$$\begin{cases} (5-\lambda)x_1 + 4x_2 + x_3 &= 0\,, \\ 4x_1 + (6-\lambda)x_2 + 4x_3 &= 0\,, \\ x_1 + 4x_2 + (5-\lambda)x_3 &= 0 \end{cases} \tag{1e}$$

To nie jest krok "obowiązkowy", ale dla uproszenia zapisu oznaczmy $5 - \lambda = z$. Wówczas powyższy układ równań przybierze postać (w zapisie macierzowym)

$$\begin{bmatrix} z & 4 & 1 \\ 4 & z+1 & 4 \\ 1 & 4 & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0\,. \tag{1f}$$

Oczywistym rozwiązaniem równania (1f) jest $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, ale nie jest to rozwiązanie interesujące, gdyż nie spełnia warunku normalizacji. Czy równanie (1f) *może* mieć niezerowe rozwiązanie? Tak, **pod warunkiem**, że wyznacznik główny tego układu równań jest równy zero. Obliczamy

$$\det\begin{bmatrix} z & 4 & 1 \\ 4 & z+1 & 4 \\ 1 & 4 & z \end{bmatrix} = z^2(z+1) + 32 - (z+1) - 32z = (z-1)\left[(z+1)^2 - 32\right] = 0\,. \tag{1g}$$

A zatem wyznacznik układu równań (1f) jest równy zero gdy $z = 1$ lub $z = -1 \pm 4\sqrt{2}$. Teraz należy rozpatrzyć te wszystkie trzy przypadki. Zauważmy, że w związku z zerowaniem się wyznacznika głównego, w każdym wypadku dostaniemy tylko dwa niezależnie równania.

(a) $z = 1$.

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \tag{1h}$$

Pierwsze i trzecie z równań (1h) są identyczne. Bierzemy zatem pierwsze i drugie z tych równań i rozwiązujemy je, traktując x_3 jako parametr. Jako rozwiązanie otrzymujemy

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} \tag{1i}$$

Biorąc pod uwagę, że $\|\mathbf{x}\|^2 = 1$, dostajemy $x_3 = \pm 1/\sqrt{2}$. Podstawiamy do (1c) i, niezależnie od wyboru znaku, dostajemy $\mathcal{N}^2(z=1) = 4$.

(b) $z = -1 + 4\sqrt{2}$. Biorąc pierwsze i drugie równanie, dostaję

$$\begin{cases} (-1 + 4\sqrt{2})x_1 + 4x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 + 4\sqrt{2}x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \tag{1j}$$

Rozwiązaniem jest

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_3 \\ -\sqrt{2}x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} \tag{1k}$$

a po unormowaniu $x_3 = \pm 1/2$. Po podstawieniu do (1c) dostaję $\mathcal{N}^2(z = -1 + 4\sqrt{2}) = 6 - 4\sqrt{2} \simeq 0.34$.

(c) $z = -1 - 4\sqrt{2}$. Postępując analogicznie, jak w poprzednim przypadku, otrzymuję

$$\begin{cases} (-1 - 4\sqrt{2})x_1 + 4x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 - 4\sqrt{2}x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \tag{1l}$$

co po rozwiązaniu i uwzględnieniu normalizacji daje $x_1 = 1/2, x_2 = 1/\sqrt{2}, x_3 = 1/2$ oraz $\mathcal{N}^2(z = -1 - 4\sqrt{2}) = 6 + 4\sqrt{2} \simeq 11.66$.

Zatem

$$\mathcal{N}^2_{\max} = 6 + 4\sqrt{2} = 4 + 4\sqrt{2} + 2 = (2 + \sqrt{2})^2 \tag{1m}$$

$$\|\mathbf{A}\| = 2 + \sqrt{2} \tag{1n}$$

Uwaga: ponieważ macierz $\mathbf{A}$ jest **symetryczna**, istnieje alternatywny sposób rozwiązania — norma macierzy jest równa największemu modułowi wartości własnej. Konstruuję więc równanie charakterystyczne

$$\det \begin{bmatrix} 2-\xi & 1 & 0 \\ 1 & 2-\xi & 1 \\ 0 & 1 & 2-\xi \end{bmatrix} = -\xi^3 + 6\xi^2 - 10\xi + 4 = -(\xi-2)(\xi^2 - 4\xi + 2) = 0\,, \tag{1o}$$

którego pierwiastkami (wartościami własnymi macierzy) są $\xi = 2, \xi = 2 \pm \sqrt{2}$. Wybierając największą z tych wartości własnych, dostaję $\|\mathbf{A}\| = 2 + \sqrt{2}$, jak poprzednio ☺

2.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2a}$$

Postępując jak w poprzednim zadaniu, otrzymuję

$$\mathcal{N}^2 = (x_1 + x_2)^2 + x_2^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2\,, \tag{2b}$$
$$\mathcal{L} = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - \lambda(x_1^2 + x_2^2 - 1) \tag{2c}$$

Obliczam pochodne cząstkowe $\partial\mathcal{L}/\partial x_1$, $\partial\mathcal{L}/\partial x_2$, przyrównuję je do zera i dostaję

$$\begin{cases} (1-\lambda)x_1 + x_2 & = 0 \\ x_2 + (2-\lambda)x_2 & = 0 \end{cases} \tag{2d}$$

Dla uproszczenia notacji oznaczam $1 - \lambda = z$. W tej notacji

$$\begin{cases} zx_1 + x_2 & = 0 \\ x_2 + (1+z)x_2 & = 0 \end{cases} \tag{2e}$$

Warunkiem koniecznym na to, aby układ (2e) miał niezerowe rozwiązanie, jest, aby wyznacznik główny tego układu był równy zero. Zatem

$$z(z+1) - 1 = z^2 + z - 1 = 0\,, \tag{2f}$$

skąd $z = (-1 \pm \sqrt{5})/2$.

Z pierwszego z równań (2e) otrzymuję $x_2 = -zx_1$, a po uwzględnieniu normalizacji, $x_1^2 = 1/(1+z^2)$. Zatem

$$\mathcal{N}^2 = x_1^2 - 2zx_1^2 + 2z^2x_1^2 = \frac{1 - 2z + 2z^2}{1+z^2}\,. \tag{2g}$$

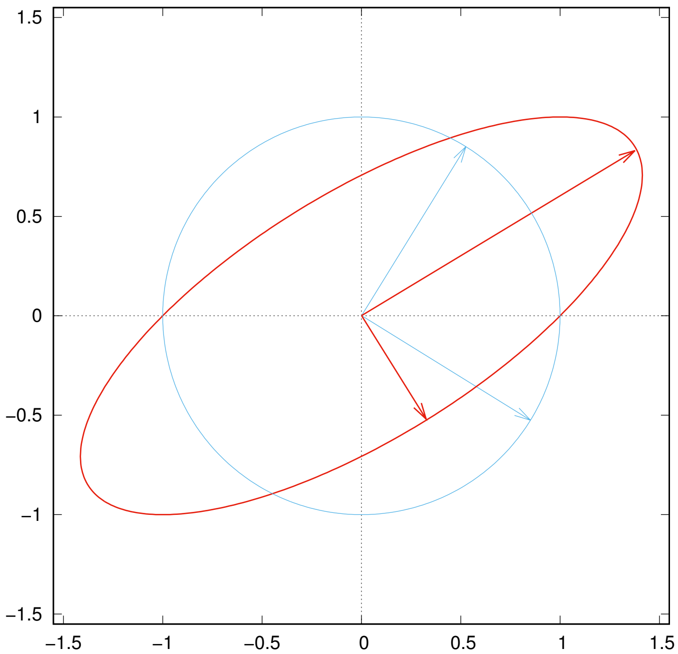
Po podstawieniu obliczonych wartości z odpowiadających zerowaniu się wyznacznika, dostaję $\mathcal{N}^2_{\min} = (3 - \sqrt{5})/2, \mathcal{N}^2_{\max} = (3 + \sqrt{5})/2$.

Ostatecznie

$$\|\mathbf{B}\| = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\,. \tag{2h}$$

Ostatnią równość można sprawdzić przez podniesienie wyrażenia $(1+\sqrt{5})/2$ do kwadratu.

Ciekawe jest stwierdzić, jak okrąg jednostkowy jest przekształcany przez macierz (2a).



Okrąg jednostkowy (niebieski) i jego obraz (czerwony) po przekształceniu przez macierz (2a). Pokazano też wektory najbardziej rozciągane i najbardziej skracane przez tę macierz. Analogicznie rozciągane/skracane są też wektory przeciwne do nich, leżące w trzeciej i drugiej ćwiartce. Zauważmy, że te "ekstremalne" wektory **nie** są wektorami własnymi macierzy (2a).

Ponieważ macierz $\mathbf{B}$ **nie** jest symetryczna, próba znalezienia jej normy poprzez wartości własne nie działa. Można jednak skorzystać z własności, że $\left\|\mathbf{B}^T\mathbf{B}\right\| = \|\mathbf{B}\|^2$. Dla macierzy (2a)

$$\mathbf{B}^T\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} . \tag{2i}$$

Jest to macierz symetryczna. Jej wartości własne znajdujemy rozwiązując równanie

$$\det \begin{bmatrix} 1-\xi & 1 \\ 1 & 2-\xi \end{bmatrix} = \xi^2 - 3\xi + 1 = 0 \,, \tag{2j}$$

skąd $\xi_{1,2} = (3 \pm \sqrt{5})/2$. Większa z tych liczb jest normą macierzy $\mathbf{B}^T\mathbf{B}$. Wyciągając pierwiastek, znajdujemy, że $\|\mathbf{B}\| = (1 + \sqrt{5})/2$, jak poprzednio.

3. Definicję normy indukowanej macierzy można uogólnić także na macierze niekwadratowe. Znajdź normę macierzy

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{3a}$$

Jedyną trudność (?) w tym zadaniu stanowi fakt, że argumentem jest wektor trójwymiarowy, a wynikiem dwuwymiarowy.

Postępując jak poprzednio, otrzymujemy

$$\mathcal{N}^2 = (x_1 + x_3)^2 + x_2^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_3 \tag{3b}$$

$$\mathcal{L} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_3 - \lambda(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1) \tag{3c}$$

Po przyrównaniu pochodnych cząstkowych do zera dostaję

$$\begin{cases} (1-\lambda)x_1 + x_3 & = 0 \\ (1-\lambda)x_2 & = 0 \\ x_1 + (1-\lambda)x_3 & = 0 \end{cases} \tag{3d}$$

Jeśli $\lambda = 1$, rozwiązaniem jest $x_1 = x_3 = 0$, x_2 dowolne, a po uwzględnieniu warunku unormowania, $x_2 = \pm 1$. Wówczas $\mathcal{N}^2 = 1$. Jeśli $\lambda \neq 1$, $x_2 = 0$ oraz musi zachodzić

$$\begin{cases} (1-\lambda)x_1 + x_3 & = 0 \\ x_1 + (1-\lambda)x_3 & = 0 \end{cases} \tag{3e}$$

Aby ten układ równań mógł mieć niezerowe rozwiązanie, jego wyznacznik główny musi znikać, czyli zachodzić $z = \pm 1$, gdzie $z = 1 - \lambda$. W takim wypadku $x_3 = \mp x_1$, a po uwzględnieniu normalizacji rozwiązaniami są wektory

$$\begin{bmatrix} \mp\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \tag{3f}$$

Wówczas

$$\mathcal{N}^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \mp 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \mp 1\,. \tag{3g}$$

Wybierając największą z obliczonych wartości $\mathcal{N}^2$, widzimy, że

$$\|\mathbf{C}\| = \sqrt{2}\,. \tag{3h}$$

W tym wypadku próba szukania normy macierzy poprzez wartości własne wręcz nie ma sensu, jako że macierz $\mathbf{C}$ nie jest kwadratowa.

PFG