

1. Niech

$$f(x) = (x - a)^k \cdot g(x), \quad (1)$$

gdzie $g(x)$ jest różniczkowalna w otoczeniu a oraz $g(a) \neq 0$. Udowodnij, że metoda Newnona jest zbieżna do miejsca zerowego $x = a$ i znajdź tempo tej zbieżności.

2. Zastosuj metodę Newtona do funkcji

$$g(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{|f'(x)|}} \quad (2)$$

i pokaż, do jakiej iteracji ona prowadzi. Jak miejsca zerowe funkcji $g(x)$ mają się do miejsc zerowych funkcji $f(x)$?

3. Stosując metodę Newtona do równania

$$x^2 - a = 0, \quad (3)$$

gdzie $a > 0$, skonstruuj algorytm numerycznego obliczania pierwiastka kwadratowego.

4. Niech $a \in \mathbb{R}$: $a > 0$. Bez posługiwania się pojęciem pochodnej¹ udowodnij, że iteracja

$$z_{n+1} = \frac{1}{2} \left(z_n + \frac{a}{z_n} \right) \quad (4)$$

jest zbieżna do \sqrt{a} dla wszystkich dodatnich punktów początkowych i do $-\sqrt{a}$ dla wszystkich ujemnych punktów początkowych.

5. Znajdź równanie charakterystyczne macierzy

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad (5)$$

Wskazówka: Proszę zastosować rozwinięcie Laplace'a według pierwszej kolumny.

PFG

¹Skorzystanie z metody Newtona oznacza odwołanie się do pojęcia pochodnej.