

1. Dobierając odpowiednie algorytmy (wybór trzeba uzasadnić!), rozwiąż następujące układy równań:

(a)

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} \quad (1)$$

(b)

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} \quad (2)$$

2. Dane jest macierz  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{128 \times 128}$  o następującej strukturze

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Rozwiązać równanie  $\mathbf{Ax} = \mathbf{e}$ , gdzie  $\mathbf{A}$  jest macierzą (3), natomiast  $\mathbf{e}$  jest wektorem, którego wszystkie składowe są równe 1, za pomocą

- metody Gaussa-Seidela,
- metody gradientów sprzężonych.

Algorytmy **muszą** uwzględniać strukturę macierzy (3)!

Proszę porównać graficznie tempo zbieżności tych metod, to znaczy jak zmieniają się normy  $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}\|$ , gdzie  $\mathbf{x}_k$  oznacza  $k$ -ty iterat. Porównać efektywną złożoność obliczeniową ze złożonością obliczeniową rozkładu Cholesky'ego dla tej macierzy.

3. Dana jest macierz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{19}{12} & \frac{13}{12} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & \frac{13}{12} & -\frac{17}{12} \\ \frac{13}{12} & \frac{13}{12} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{11}{12} & \frac{13}{12} \\ \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} \\ \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} \\ \frac{13}{12} & -\frac{11}{12} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & \frac{13}{12} & \frac{13}{12} \\ -\frac{17}{12} & \frac{13}{12} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & \frac{13}{12} & \frac{19}{12} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Przy użyciu metody potęgowej znajdź jej dwie największe na moduł wartości własne i odpowiadające im wektory własne.

4. Sprowadź macierz z zadania 3 do postaci trójdzielnej, a następnie znajdź jej wszystkie wartości własne.
5. Konstruując odpowiednią macierz symetryczną, rzeczywistą, znajdź wartości własne i unormowane wektory własne poniższej macierzy hermitowskiej:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -i \\ 1 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 1 \\ i & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Wskazówka: Wektory własne tej macierzy mogą być zespolone. Normę wektora  $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^N$  obliczamy jako  $\|\mathbf{u}\|^2 = \mathbf{u}^\dagger \mathbf{u}$ .

6. Dana jest macierz

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Znajdź jej (przybliżony) wektor własny do wartości własnej  $\lambda \simeq 0.38197$ .

Uwaga: w zadaniu **nie** chodzi o to, aby znaleźć **wszystkie** wartości własne powyższej macierzy, a następnie wskazać wektor własny odpowiadający podanej przybliżonej wartości własnej. Prawidłowe rozwiązanie nie obejmuje szukania żadnych wartości własnych, a **jedynie** konstrukcję (przybliżonego) wektora własnego odpowiadającego podanej (przybliżonej) wartości własnej.

7. Znajdź, z dokładnością do czterech cyfr dziesiętnych, wartości współczynników wielomianu interpolacyjnego opartego na następującej tabelce (ze względów typograficznych tabelka ma orientację pionową, a nie, jak to jest zwyczajowo, poziomą;  $x$  oznacza węzeł,  $f(x)$  wartość funkcji w węźle):

| $x$   | $f(x)$              |
|-------|---------------------|
| -0.75 | 1.1309204101562500  |
| -0.50 | 2.3203125000000000  |
| -0.25 | 1.9284057617187500  |
| 0.00  | 1.0000000000000000  |
| 0.25  | 0.0554809570312500  |
| 0.50  | -0.6015625000000000 |
| 0.75  | -0.7525024414062500 |
| 1.00  | 0.0000000000000000  |

Sporządź wykres uzyskanego wielomianu w przedziale  $-1.25 \leq x \leq 1.25$  i zaznacz na nim punkty, które posłużyły do jego konstrukcji.

Uwaga: Jeśli zadanie to zostanie wykonane prawidłowo, obliczone współczynniki wielomianu interpolacyjnego będą “ładne”.

8. Znajdź wartości funkcji

$$f(x) = \frac{1}{1 + 5x^2} \quad (7)$$

w punktach  $-7/8, -5/8, -3/8, -1/8, 1/8, 3/8, 5/8, 7/8$  a następnie skonstruuj wielomian interpolacyjny Lagrange’a oparty na tych węzłach i wartościach funkcji (7) w tych węzłach. Narysuj wykres wielomianu interpolacyjnego. Punkt dodatkowy: znajdź *współczynniki* wielomianu interpolacyjnego.

9. Skonstruuj naturalny splajn kubiczny dla funkcji i węzłów z zadania 8. Sporządź jego wykres.
10. Skonstruuj interpolację funkcjami wymiernymi według algorytmu Floatera i Hormanna z parametrem  $d = 3$  dla funkcji i węzłów z zadania 8. Sporządź odpowiedni wykres.
11. Posługując się wzorem trapezów i metodą Romberga, oblicz całkę

$$I = \int_0^{\infty} \sin\left(\pi \frac{1 + \sqrt{x}}{1 + x^2}\right) e^{-x} dx \quad (8)$$

z dokładnością do  $10^{-7}$ .

Wskazówka:

$$I = \underbrace{\int_0^A \sin\left(\pi \frac{1 + \sqrt{x}}{1 + x^2}\right) e^{-x} dx}_{I_1} + \underbrace{\int_A^{\infty} \sin\left(\pi \frac{1 + \sqrt{x}}{1 + x^2}\right) e^{-x} dx}_{I_{\text{ogon}}} \quad (9)$$

przy czym

$$|I_{\text{ogon}}| \leq \int_A^{\infty} \left| \sin\left(\pi \frac{1 + \sqrt{x}}{1 + x^2}\right) \right| e^{-x} dx \leq \int_A^{\infty} e^{-x} dx = e^{-A}. \quad (10)$$

Znajdź  $A$  takie, że  $e^{-A} < 10^{-7}$ , a następnie znajdź numerycznie wartość  $I_1$  z odpowiednią dokładnością.

12. Niech

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \cos\left(\frac{1+t}{t^2+0.04}\right) e^{-t^2} dt \quad (11)$$

Narysuj wykres  $F(x)$  oraz oblicz  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x)$  z dokładnością  $10^{-8}$ .

13. Stosując metodę Laguerre'a wraz ze strategią obniżania stopnia wielomianu i wygładzania, znajdź wszystkie rozwiązania równań

$$243z^7 - 486z^6 + 783z^5 - 990z^4 + 558z^3 - 28z^2 - 72z + 16 = 0 \quad (12a)$$

$$z^{10} + z^9 + 3z^8 + 2z^7 - z^6 - 3z^5 - 11z^4 - 8z^3 - 12z^2 - 4z - 4 = 0 \quad (12b)$$

$$z^4 + iz^3 - z^2 - iz + 1 = 0 \quad (12c)$$

Uwaga: to jest *jedno* zadanie.

14. Rozwiąż układ równań

$$2x^2 + y^2 = 2 \quad (13a)$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 = \frac{1}{4} \quad (13b)$$

15. Sporządź naturalny splajn kubiczny na podstawie danych zawartych w pliku <http://th-www.if.uj.edu.pl/zfs/gora/metnum16/dane.txt>. Przedstaw graficznie punkty danych i znaleziony splajn.

16. Znajdź, z dokładnością do  $10^{-6}$ , minimum funkcji

$$y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{16}x \quad (14)$$

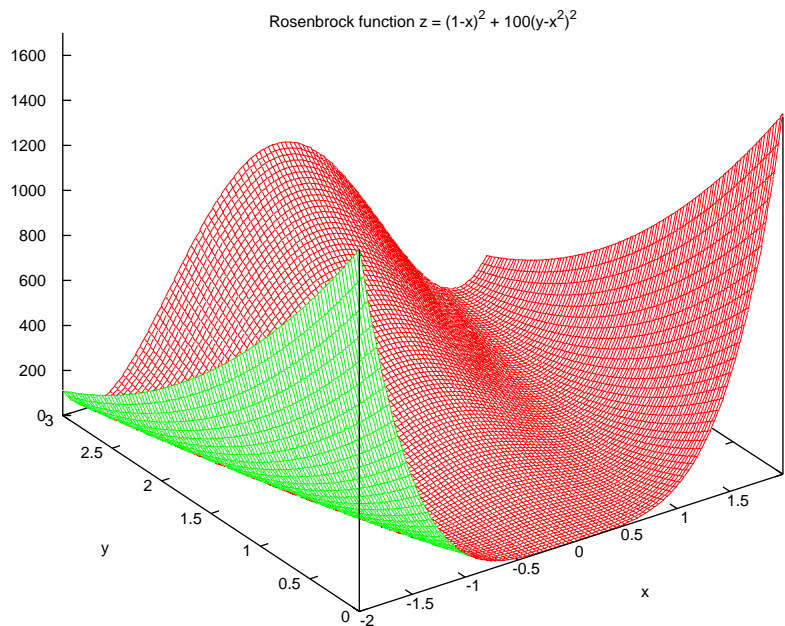
(a) za pomocą metody złotego podziału,

(b) za pomocą metody Brenta.

Porównaj szybkość zbieżności obu metod.

Uwaga: To jest jedno zadanie. Ważne, aby w obu podpunktach znaleźć *to samo* minimum.

17. Znajdź numerycznie (analitycznie zrobić można to bardzo łatwo) minimum funkcji Rosenbrocka (zobacz rysunek)



$$f(x, y) = (1 - x)^2 + 100(y - x^2)^2. \quad (15)$$

Rozpocznij poszukiwania od kilku–kilkunastu różnych, losowo wybranych punktów i oszacuj, ile trzeba kroków aby zbliżyć się do minimum narozsądną odległość. Przedstaw graficznie drogę, jaką przebywa algorytm poszukujący minimum (to znaczy pokaż położenia kolejnych minimalizacji kierunkowych lub kolejnych zaakceptowanych kroków wykonywanych w metodzie Levenberga–Marquardta).

18. Startując z kilku losowo wybranych punktów początkowych, znajdź minima czterowymiarowej funkcji Rosenbrocka

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1 - x_1)^2 + 100(x_2 - x_1^2)^2 + 100(x_3 - x_2^2)^2 + 100(x_4 - x_3^2)^2. \quad (16)$$

19. Startując ze 128 punktów początkowych, rozmieszczonych losowo w kwadracie  $[-3, 3] \times [-3, 3]$ , znajdź minima funkcji

$$f(x, y) = 0.25x^4 + y^2 - 0.5x^2 + 0.125x + 0.0625(x - y) \quad (17)$$

20. Dopasuj wielomiany niskich stopni do danych zawartych w pliku <http://th-www.if.uj.edu.pl/zfs/gora/metnum16/w.txt>, zakładając, że pomiary są nieskorelowane i obarczone takim samym błędem. Ustal za pomocą kryterium Akaike, jaki stopień wielomianu wybrać. Przyjmując

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - w(x_i))^2, \quad (18)$$

gdzie  $(x_i, y_i)$  oznaczają punkty pomiarowe,  $N$  jest liczbą pomiarów,  $w(x)$  dopasowanym wielomianem, znajdź macierz kowariancji estymatorów (czyli współczynników dopasowanego

wielomianu).

Jest to jeden z niewielu przypadków, w których trzeba explicitie znaleźć odwrotność jakiejś macierzy.

21. Znajdź przybliżenia Padé  $R_{40}$ ,  $R_{22}$ ,  $R_{04}$  funkcji

$$E(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - x^2 \sin^2 \theta} \, d\theta, \quad x \in (-1, 1) \quad (19)$$

Sporządź ich wykresy, oraz wykres samej funkcji (19), w przedziale  $[-0.5, 0.5]$ . Czy przybliżenia  $R_{31}$ ,  $R_{13}$  istnieją?

PFG