Od geometrii do algebr.

Geometria to przede wszystkim nauka o mierzeniu i to dzięki niej wiemy jak obliczyć długość krzywej, pole powierzchni trójkąta czy objętość stożka – obiektów jakie dobrze znamy i potrafimy sobie znakomicie wyobrazić. Kiedy jednak słyszymy „geometria nieprzemienna” nasza wyobraźnia nie podpowiada nam o co chodzi: czym bowiem może być sztuka mierzenia jakiś nieprzemiennych obiektów ? No i – przede wszystkim - co to są za obiekty? Żeby to wyjaśnić musimy spojrzeć na geometrię niejako od jej drugiej strony opisując ją trochę tak jak ją naprawdę widzimy. Popatrzmy sobie na najprostszy świat – składający się z kilku punktów. Co potrafimy na takim świecie (matematycznego) zrobić ? Potrafimy stworzyć na nim funkcję (powiedzmy o wartościach 0 i 1) – umieszczając w każdym punkcie tego świata włączoną bądź wyłączoną lampę. Pojedyncza taka funkcja niewiele nam powie, jednak mając wszystkie możliwe funkcje na tym naszym świecie będziemy mogli powiedzieć przynajmniej z ilu punktów składa się nasz świat.

Przykład: weźmy wszystkie funkcje na n punktach o wartościach 0 i 1. Ilość wszystkich takich funkcji to 2^n *- zatem badając tylko same funkcje możemy wiedzieć z ilu punktów składa się nasza przestrzeń.*

W analogiczny sposób można spróbować opisać znacznie bardziej skomplikowane zbiory punktów – jak choćby okrąg – tym razem podając jednak funkcje o wartościach zespolonych. Taki zbiór funkcji ma jednak dość ciekawe własności - trochę podobnie jak same liczby – wiemy, że dwie funkcje możemy do siebie dodać, pomnożyć przez liczbę a nawet przemnożyć przez siebie: iloczyn funkcji f i g, $f{\cdot}g$, w punkcie x będzie miał wartość f(x)g(x). Strukturę taką nazywamy algebrą, pokrótce mówiąc jest to zbiór obiektów które możemy do siebie dodawać, mnożyć przez siebie i mnożyć przez liczby. W naszym przypadku łatwo też zobaczyć, że mnożenie w algebrze funkcji jest przemienne jako, że $f(x)g(x) = g(x)f(x)$. Tak więc – używając tego języka - próbujemy opisać zbiór punktów – podając odpowiednia algebrę funkcji na nim.

Zaryzykujmy pewna hipotezę - skoro nasza konstrukcja dobrze działa dla zbiorów punktów (jako, iż na każdym zbiorze punktów możemy stworzyć funkcje) naturalnie nasuwa się pytanie czy tak otrzymane algebry funkcji są takie same i czy może dowolna przemienna algebra jest algebrą funkcji na jakimś zbiorze ? Okazuje się, że pozytywna odpowiedź na to drugie pytanie możliwa jest jednak jedynie dla pewnej specyficznej klasy algebr, które skonstruowane są z ciągłych funkcji (posiadających granicę w każdym punkcie) na pewnych przestrzeniach. Ta odpowiedniość wystarcza jednak zaledwie na rozróżnienie algebr dla pewnych klas takich przestrzeni – na przykład, algebra ciągłych funkcji na okręgu jest inna niż algebry ciągłych funkcji na płaszczyźnie, ale tak sama jak algebra ciągłych funkcji na obwodzie dowolnego wielokąta czy elipsy. Po to by opisać okrąg lub elipsę dokładniej i odróżnić je od siebie potrzebujemy innych narzędzi matematycznych, których dostarcza geometria: na przykład jeśli zaczniemy badać funkcje nie tylko ciągłe ale i różniczkowalne – będziemy mogli odróżnić okrąg od obwodu wielokąta (który posiada „rogi”) a wprowadzając odpowiednio dodatkowe informacje związane z odległościami na naszej przestrzeni będziemy mogli rozróżnić elipsę od okręgu.

Nieprzemienna geometria jest jedynie rozszerzeniem powyższego opisu, biorącym jednak jako swoje podstawowe obiekty dowolne, niekoniecznie przemienne algebry czyli algebry składające się z obiektów takich, że $a{\cdot}b$ niekoniecznie równe jest $b{\cdot}a$ dla elementów a i b z danej algebry. Takie algebry istnieją – mogą to być chociażby proste algebry macierzy, ale również bardzo skomplikowane i bogate nieprzemienne algebry zdefiniowane niejednokrotnie w bardzo abstrakcyjny sposób. Mogą to być algebry, pojawiające się w naturalny sposób w fizyce – i choć, gdy są nieprzemienne na pewno nie odpowiadają w żaden sposób zbiorom punktów – z przyzwyczajenia (i trochę nadużywając tego pojęcia) mówimy o nich jakby odpowiadały jakimś „nieprzemiennym przestrzeniom”.

Przykład: algebra macierzy 2 ×2:

$$\textit{mnożenie macierzy przez liczbę:} \qquad \lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix},$$

$$\textit{dodawanie macierzy:} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix},$$

$$\textit{mnożenie macierzy:} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ ca'+dc' & cb'+dd' \end{pmatrix}$$

Fizyka i nieprzemienność.

Kiedy na początku ubiegłego stulecia pojawiły się pierwsze matematyczne opisy teorii opisującej zjawiska kwantowe, chyba mało kto zdawał sobie sprawę z przełomu jaki nastąpił. Pewnym milczącym założeniem wszystkich wcześniejszych teorii fizycznych była możliwość ich opisu poprzez wielkości, które można zmierzyć, czyli przypisać im konkretną wartość liczbową, zazwyczaj porównując je do ustalonych jakoś podstawowych jednostek. Na przykład, w mechanice ruch cząstek opisujemy poprzez podanie wektorów położeń i pędów, których składowe w wybranym układzie współrzędnych możemy zmierzyć. Co więcej, przywykliśmy, iż wielkości te przybierać mogą dowolnie wybrane wartości i na pewno są ciągłe – składowa położenia czy pędu, lub energia mogą być zadane poprzez każdą liczbę rzeczywistą. Nawet opisując takie zjawiska jak pole grawitacyjne czy pole elektryczne lub magnetyczne w gruncie rzeczy nie korzystamy z niczego innego jak zwykłych liczb – przypisując je jedynie punktom przestrzeni – czyli, tak naprawdę posługując się właśnie funkcjami. Dużym zatem szokiem musiało być odkrycie, iż widma atomów są dyskretne (co znaczy iż możliwe energie przyjmowane przez elektrony w atomie są dyskretne, skwantowane i opisywane nie przez wszystkie liczby rzeczywiste, ale raczej przez liczby naturalne opisujące poziomy energii. Co więcej, mechanika kwantowa doprowadziła do odkrycia relacji nieoznaczoności, która tłumaczona w prosty sposób mówi, iż pęd i położenie nie są jednocześnie mierzalne. Czym zatem mogą być pęd i położenie, czym może być energia, skoro nie są – tak jak to przedtem uważano, zwykłymi liczbami ? Opisując ruch cząstek korzysta z pojęcia przestrzeni fazowej – przestrzeni możliwych wartości pędów i położeń, gdzie trajektorie w tej przestrzeni opisują możliwe ruchy. Skoro jednak pędy i położenia nie mogą być jednocześnie mierzone – czym może być przestrzeń położeń i pędów mechaniki kwantowej ? Pewna sugestię, jak opisać te wielkości dostarczył Heisenberg – który z reguł spektroskopii – czyli składania linii widmowych atomów wyprowadził zasady mechaniki macierzowej. Dopiero jednak Born i Jordan zwrócili uwagę, iż reguły „składania" tych nowych zmiennych opisujących fizyczne wielkości to nic innego jak reguły mnożenia macierzy. W ten sposób nieprzemienne algebry, takie jak właśnie algebra macierzy, znalazły swoje pierwsze zastosowanie w fizyce, a przestrzeń fazowa – czyli przestrzeń położeń i pędów stała się pierwszą „niekomutatywną przestrzenią".

Przykład: relacja nieoznaczoności jest konsekwencją tego, iż położenie x i pęd p nie są funkcjami gdyż ich mnożenie nie jest przemienne: $p{\cdot}x - x{\cdot}p = -i\hbar$, *gdzie* $i^2=-1$ *a* $\hbar$ *jest fundamentalną stałą fizyczną (stała Planka podzielona przez* 2π*). Konstruując „funkcje" z p i x (jak choćby dowolne wielomiany, na przykład p^2 + xp +x^2) otrzymujemy nieprzemienną algebrę opisującą przestrzeń fazową mechaniki kwantowej.*

Może nie był to przewrót typu kopernikańskiego, gdyż to nie my zostaliśmy przestawieni z centrum Wszechświata na jego kraj. Ale z drugiej strony, to w końcu cała przestrzeń straciła na znaczeniu.

Czym zajmuje się geometria nieprzemienna?

Nieprzemienna geometria ma dziś różne oblicza – choć jedną zasadniczą wspólną cechę. O ile zwykła geometria zajmuje się badaniem pewnych zbiorów punktów to geometria nieprzemienna stawia algebry (niekoniecznie przemienne) jako przedmiot swoich badań. Mogą to być algebry przemienne (na przykład opisujące funkcje na fraktalach), abstrakcyjne algebry zadane przez relacje (jak choćby ta opisująca położenia i pędy w mechanice kwantowej) czy też algebry macierzy lub ich niekończenie wymiarowe rozszerzenia – algebry operatorów.

W matematyce, metody nieprzemiennej geometrii służą badaniom własności tych algebr, ich rozróżnianiu (podobnie jak metody geometryczne pomagają rozróżnić sferę od torusa) i konstruowaniu ich symetrii, algebr Hopfa, które są nieprzemiennymi uogólnieniami grup. W fizyce, nieprzemienna geometria znajduje zastosowanie w opisie oddziaływań fundamentalnych (między innymi próbując przypisać geometryczne znaczenie prawie już odkrytej cząstce Higgsa), teorii strun , teoriach grawitacji kwantowej czy nawet opisie efektów kwantowych (jak kwantowy efekt Halla).

Niekomutatywna geometria istnieje od niedawna, gdyż 30 lat w matematycznej skali to jak mgnienie oka. Jej rozwój i możliwe korzyści stosowania jej do opisu świata fizycznego i rozwiązywania matematycznych problemów są jeszcze cały czas przed nami. Czy jest to jednak teoria matematyczna czy tylko język ? Czy też jest to dodatkowa nazwa na kawałek matematyki (głównie teorię algebr operatorowych) ? Twórca nieprzemiennej geometrii, Alain Connes powiedział kiedyś w wywiadzie:

– ... First, noncommutative geometry for me is this duality between geometry and algebra, with a striking coincidence between the algebraic rules and the linguistic ones. Ordinary language never uses parentheses inside the words. This means that associativity is taken into account, but not commutativity, which would permit permuting the letters freely.

(„Po pierwsze, nieprzemienna geometria jest dla mnie tą dualnością między geometrią a algebrą, z uderzającym podobieństwem między regułami lingwistycznymi i algebraicznymi. Zwykły język nigdy nie używa nawiasów wewnątrz słów. To oznacza, iż łączność jest założona – ale nie przemienność, która pozwalałaby na swobodne przemieszczanie liter wewnątrz wyrazu.")

Andrzej Sitarz