

## Geometria i funkcjonały spektralne.

(streszczenie popularnonaukowe)

Od początku nowoczesnego matematycznego podejścia do opisu świata geometria odgrywa istotną rolę w jego opisie w każdej skali, począwszy od skali mikro (cząstki elementarne), poprzez skalę mechaniki klasycznej (ruch ciał) do skali makro (ewolucja wszechświata). Było to widoczne już w mechanice klasycznej i prawach Newtona, a stało się jasne w elektrodynamice i współczesnych teoriach fizycznych, takich jak ogólna teoria względności i teorie cechowania.

Geometria jest często postrzegana jedynie jako badanie przestrzeni i budowanych na nich struktur, ale ma jeszcze inną stronę, która została znakomicie sformułowana w słynnym pytaniu zadany ponad 50 lat temu przez Marka Kaca: „Czy można usłyszeć kształt bębna?”. Rzeczywiście poprzez słuchanie dźwięków bębna (częstotliwości) można rozpoznać jego kształt, na przykład można łatwo odróżnić okrągły bęben od kwadratowego lub trójkątnego.

Chociaż wiemy, że zasadniczo odpowiedź na to pytanie jest przecząca, to zrozumienie, że „słyszenie” geometrii (które w matematyce jest powiązane z widmem operatorów różnicowych, takich jak operator Laplace’a lub operator Diraca) może dostarczyć istotnych informacji na temat kształtu i rozmiar obiektów. Typowym przykładem jest prawo Weyla odkryte ponad 100 lat temu, które łączy objętość obiektu ze tempem wzrostu jego „częstotliwości”.

Proponowany projekt, który ma swoje korzenie w tym prostym pytaniu, proponuje badanie tym metodami „słyszenia” (czyli analizy spektralnej) bardziej subtelnych struktur geometrycznych, takie jak tensory Riemanna i Ricciego. Tensory te odgrywają znaczącą rolę w opisie geometrii, a w szczególności pojawiają się w konstrukcji teorii grawitacji.

Dalsza część projektu wykracza poza klasyczne geometrie i poszukuje metody „słyszenia” właściwości geometrycznych algebr, które nie odpowiadają klasycznym przestrzeniom. Na przykład klasyczna analiza przestrzeni geometrycznych pozwala nam zastosować metody spektralne do „usłyszenia” objętości (jak w prawie Weyla), ale nie istnieją takie metody dla nieprzemiennej algebr. Celem projektu jest znalezienie takich metod (konkretnych funkcjonałów i zastosowanie ich do analizy własności tych algebr).

Oczekujemy, że wyniki projektu pozwolą na zastosowanie metod spektralnych do badań znacznie szerszej klasy obiektów i przybliżą uogólnienia pojęć geometrycznych do obiektów znacznie ogólniejszych niż obecnie. Pozwoli to na użycie ich do budowy solidnie sformułowanych matematycznie i istotnych fizycznie modele geometrii czasoprzestrzennych do opisu wszystkich oddziaływań fundamentalnych w przyrodzie.