Mechanika Kwantowa
kurs dla doktorantów 21
15 i 16.5.2001

1. Dokończenie wyliczenia x_{00}. Na poprzednich ćwiczeniach otrzymaliśmy następujący wzór:

$$x_{00} = \exp \frac{\alpha}{\omega^2} \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^T dt\, f(t) \int_0^T ds\, f(s) \left[\cos\omega(T-s-t) - e^{-i\omega T} \cos\omega\,(t-s) \right] + 2\omega^2 B \right\},$$

gdzie nawias $\{\cdots\}$ jest sumą 2 całek:

$$\int_0^T dt\, f(t) \int_0^t ds\, f(s) \left[-\frac{1}{2}\cos\omega(T-s-t) + \frac{1}{2} e^{-i\omega T} \cos\omega\,(t-s) + \sin\omega\,(T-t)\sin\omega s \right],$$

$$\int_0^T dt\, f(t) \int_t^T ds\, f(s) \left[-\frac{1}{2}\cos\omega(T-s-t) + \frac{1}{2} e^{-i\omega T} \cos\omega\,(t-s) + \sin\omega\,(T-s)\sin\omega t \right].$$

Proszę doprowadzić rachunek do końca i wykazać, że:

$$x_{00} = \exp \left\{ -\frac{1}{4\omega\hbar} \int_0^T dt\, f(t) \int_0^T ds\, f(s) e^{-i\omega|s-t|} \right\}.$$

2. W rozdziale 9-4 podręcznika Feynmana Hibbsa dyskutuje się przejście układu *promieniowanie–atom* od stanu $|n,0\rangle$ (atom w n-tym stanie wzbudzonym, promieniowanie w stanie podstawowym) do stanu $\left|m,\vec{\sigma}\vec{k}\right\rangle$ (atom w m-tym stanie wzbudzonym + 1 foton o pędzie $\vec{k}$ i polaryzacji $\vec{\sigma}$). Proszę wykazać, że częstość przejść zdefiniowana w rachunku zaburzeń jako $dP/dt = \left|\lambda_{m,n}^{\sigma k,0}\right|^2$ wyraża się wzorem

$$\frac{dP}{dt} = \frac{\omega}{2\pi\hbar c^3} \left| \left(j_{\vec{\sigma}\vec{k}}\right)_{mn} \right|^2 d\Omega,$$

gdzie $\omega = kc$. Rachunek wykonuje się biorąc za zaburzenie S_{int} . $\left(j_{\vec{\sigma}\vec{k}}\right)_{mn}$ jest elementem macierzowym składowej Fourierowskiej prądu między stanami $|n\rangle$ i $|m\rangle$.

3. Wyliczyć $\left(j_{\vec{\sigma}\vec{k}}\right)_{mn}$ w tzw. przybliżeniu dipolowym, tzn. rozwijając $e^{-i\vec{k}\cdot\vec{q}}$ w składowej Fourierowskiej prądu w szereg. Oznaczając przez $\vec{\mu}_{mn} = \langle m|\, e\vec{q}|n\rangle$ pokazać, że

$$\frac{dP}{dt} = \frac{4\omega^3}{3\hbar c^3} \left|\vec{\mu}_{mn}\right|^2.$$