Mechanika Kwantowa

kurs dla doktorantów 20

8 i 9.5.2001

1. Działanie dla pola elektromagnetycznego sprowadza się w zasadzie do dwóch członów $S_{\rm rad}$ i $S_{\rm int}$, które w sumie składają się na działanie mające formę oscylatora wymuszonego siłą $f(t)$. Klasyczne działanie i propagator $K_f(a',a;T)$ dla oscylatora wymuszonego odpowiadające przejściu od punktu a do punktu a' w czasie T wyliczyliśmy w zestawach 6 i 7 z grudnia 2001 (na ćwiczeniach z grupą wtorkową podany został błędny wynik, w którym pominięto czynnik 2 w członach liniowych w f). W elektrodynamice kwantowej potrzebna nam będzie znajomość amplitud przejścia od stanu ϕ do stanu ϕ'. W szcególności będziemy potrzebować znajomość amplitudy próżniowej x_{00} danej wzorem:

$$x_{00}[f] = e^{i\frac{\omega T}{2}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} da' \int\limits_{-\infty}^{+\infty} da\, \phi_0^*(a')\, K_f(a',a;T)\, \phi_0(a), \tag{1}$$

gdzie stacjonarna funkcja falowa stanu podstawowego oscylatora harmonicznego dana jest wzorem:

$$\phi_0(a) = \sqrt[4]{\frac{\omega}{\pi\hbar}} e^{-\frac{\omega}{2\hbar}a^2}. \tag{2}$$

Faza $e^{i\omega T/2}$ odpowiada zależności czasowej pełnej funkcji falowej oscylatora. Proszę wyliczyć x_{00}. Odpowiedź jest bardzo prosta:

$$x_{00} = \exp\{-\frac{1}{4\omega\hbar} \int\limits_0^T dt \int\limits_0^T ds\, f(t)\, f(s)\, e^{-i\omega|t-s|}\}, \tag{3}$$

ale rachunek jest bardzo żmudny. Aby kontrolować rachunki, warto cały czas uważać, aby operować wyrażeniami jawnie symetrycznymi ze względu na zamianę $t \leftrightarrows s$. Warto też wprowadzić nowe zmienne: $a' = x + y$, $a = x - y$.