Mechanika Kwantowa

kurs dla doktorantów 19

10 i 11.04.2001

1. Nienaładowana cząstka o spinie 0 (np. neutralna cząstka π) opisana jest w teorii pola następującą funkcją Lagrange'a
$$L = \frac{1}{2}\int \left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 - c^2 \left|\vec{\nabla}\phi\right|^2 + \frac{\mu^2 c^2}{\hbar^2}\phi^2 \right] d^3\vec{r},$$
gdzie $\phi = \phi(\vec{r}, t)$ jest polem skalarnym opisującym tę cząstkę. Jaki wymiar ma pole ϕ ? Jaki wymiar i sens fizyczny ma występująca w lagrangeanie stała μ ? Znaleźć równania ruchu dla pola ϕ. Przeprowadzając analizę fourierowską analogiczną do tej z poprzedniego zadania dla pola $\vec{A}$ wykazać, że energia wzbudzeń pola ϕ dana jest relatywistycznym wzorem Eisteina
$$E = \sqrt{\vec{p}^2 c^2 - \mu^2 c^4}.$$

2. Wyprowadzić podany na wykładzie związek między transformatą fourierowską potencjału elektrycznego
$$\phi_{\vec{k}} = 4\pi \frac{\rho_{\vec{k}}}{k^2}$$
a potencjałem Coulomba w przestrzeni położeń.

3. Korzystając z definicji funkcji $\zeta($ $s = \sigma + i\tau)$:
$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \tag{1}$$
słusznej dla $\sigma > 1$ wyprowadzić reprezentację całkową
$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} dx\, x^{s-1} \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}. \tag{2}$$
W tym celu rozważyć iloczyn
$$\Gamma(s)\,\zeta(s) = \int_0^{\infty} dx\, x^{s-1}\, e^{-x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \tag{3}$$
i zmieniając zmienne $x = n\, x'$ wykonać sumowanie po n.

4. Reprezentacja Hankela. Wyprowadzić
$$\zeta(s) = -\frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \int_{C_H} dz\, z^{s-1} \frac{e^z}{1 - e^z}, \tag{4}$$
gdzie kontur C_H przebiega od $-\infty$ do 0 nad cięciem, które wybieramy wzdłuż ujemnej osi rzeczywistej, okrąża 0 po małym okręgu zgodnie z ruchem wskazówek zegara i wraca do $-\infty$. Skorzystać przy tym ze wzoru na odbicie argumentu funkcji Γ:
$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s} \text{ czy } \Gamma(1-s)\Gamma(s) = \frac{\pi}{\sin \pi(1-s)} \tag{5}$$

5. Wzór Hurwitza. Uzupełniając kontur C_H z poprzedniego zadania okręgiem C_R o promieniu $R = (2N+1)\pi$ przy $N \to \infty$ wyliczyć metodą residuów całkę

$$I = \int\limits_{C_H + C_R} dz\, z^{s-1} \frac{e^{az}}{1 - e^z} \tag{6}$$

i korzystając ze związku I z $\zeta(s)$ danego wzorem (4) wyprowadzić wzór Hurwitza:

$$\zeta(s,a) = \frac{2\,\Gamma(1-s)}{(2\pi)^{1-s}} \sin\frac{\pi s}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\pi}{n^{1-s}}. \tag{7}$$

Dla jakich s znika całka po C_R ?

6. Wzór na odbicie argumantu funkcji $\zeta(s)$. Korzystając z (7) oraz ze wzoru (5) dla $s/2$ aby wyeliminować $\sin \pi s/2$ wyprowadzić

$$\zeta(s) = \frac{2\pi}{(2\pi)^{1-s}} \frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(\frac{s}{2})\Gamma(1-\frac{s}{2})} \zeta(1-s). \tag{8}$$

Posługując się wzorem na podwojenie argumentu funkcji Γ

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) \tag{9}$$

dla $z = (1-s)/2$ wyprowadzić użyty na wykładzie wzór:

$$\zeta(s) = \pi^{s-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma(\frac{s}{2})} \zeta(1-s). \tag{10}$$