Mechanika Kwantowa

kurs dla doktorantów 18

3 i 4 4.2001

1. Dokończyć zadanie dotyczące równanie Schrödingera dla cząstki poruszającej się w polu magnetycznym o potencjale wektorowym $\vec{A}$. W tym celu rozpatrzyć ewolucję czasową funkcji falowej o jeden „skok" czasowy:

$$\psi(x, t+\epsilon) = \int d^3\vec{y}\, K(\vec{x}, \vec{y}, \epsilon)\psi(y, t). \tag{1}$$

   Korzystając ze znanej formy K i podanego na wykładzie przepisu na dyskretyzację całki oddziaływania z potencjałem wektorowym, rozwinąć wyrażenia występujące w równaniu (1) z dokładnością do wyrazów rzędu ϵ. W tym celu całkę po $d^3\vec{y}$ zamienić na całkę po $d^3\vec{\eta}$, gdzie $\vec{x} = \vec{y} + \vec{\eta}$. Pokazać, że otrzymany wynik daje się „zwinąć" do Hamiltonianu:

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right) \cdot \left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right).$$

2. Korzystając z zasady najmniejszego działania, wyprowadzić klasyczne równania pola i równania ruchu cząstki w polu dla działania danego wzorem:

$$\begin{aligned} S &= \sum_j \frac{m_j}{2} \int \dot{\vec{q}}_j(t)^2\, dt \\ &+ \sum_j e_j \int \left\{ \phi[\vec{q}_j(t), t] - \frac{1}{c}\, \dot{\vec{q}}_j \cdot \vec{A}[\vec{q}_j(t), t] \right\} \\ &+ \frac{1}{8\pi} \int \left\{ \left| \vec{\nabla}\phi + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right|^2 - \left| \vec{\nabla} \times \vec{A} \right|^2 \right\} d^3x\, dt, \end{aligned}$$

   w którym zmiennymi są: $\phi(\vec{x}, t)$, $\vec{A}(\vec{x}, t)$ oraz $\vec{q}_i(t)$.

3. Pokazać, że równania Maxwella bez ładunków i prądów redukują się dla potencjału $\vec{A}$ do równania falowego

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0.$$

   Rozwinąć $\vec{A}(\vec{r}, t)$ na fale płaskie $\exp\left(i\vec{k}\,\vec{r}\right)$ z zależnymi od czasu amplitudami $\vec{a}(\vec{k}, t)$. Pokazać, że amlitudy $\vec{a}$ spełniają równanie oscylatora harmonicznego o częstości $\omega = |\vec{k}|c$. Sprawdzić, że $\vec{a} \perp \vec{k}$ i że pola $\vec{E}$, $\vec{B}$ oraz wektor falowy $\vec{k}$ są wzajemnie prostopadłe.