Mechanika Kwantowa

kurs dla doktorantów – 15

6 i 7 marzwc 2001

1. Wyprowadzić relację komutacji operatorópw pędu i położenia wyliczając:

$$< \chi|m\frac{1}{\epsilon}\left((x_{k+1}-x_k)x_k - x_{k+1}(x_{k+1}-x_k)\right)|\psi > .$$

   WSKAZÓWKA:

   Stany zewnętrzne należy „wyewoluować” do sąsiednich punktów x_k i x_{k+1} a następnie rozwinąć w czasie. W trakcie rachunków należy skorzystać z równania Schrödingera.

2. Pokazać, że dla oscylatora harmonicznego zachodzą zwiaą związki:

$$\begin{array}{rcc} < x(t) > & = & \overline{x}(t) < 1 > \\ < x(t)x(s) > & = & [\overline{x}(t)\overline{x}(s) + g(s,t)] < 1 > \\ < x(t)x(s)x(u) > & = & [\overline{x}(t)\overline{x}(s)\overline{x}(u) + \overline{x}(t)g(s,u) + \overline{x}(s)g(t,u) + \overline{x}(u)g(t,s)] < 1 > \end{array}$$

   gdzie $\overline{x}(t)$ jest klasyczną trajektorią, a $g(t,s)$ dane jest wzorem:

$$g(t,s) = \frac{i\hbar}{m\omega\sin\omega T}\sin\omega(t_2-t)\sin\omega(s-t_1), s < t$$

$$g(t,s) = \frac{i\hbar}{m\omega\sin\omega T}\sin\omega(t_2-s)\sin\omega(t-t_1), t < s.$$

   Wskazówka: Podstawić do wzoru:

$$\left\langle \exp\frac{i}{\hbar}\int dt f(t)x(t)\right\rangle_S = \exp\frac{i}{\hbar}(S'_{cl}-S_{cl}) < 1 >_S$$

   znane wyrażenia na dzialanie dla oscylatora bez wymuszenia (S_{cl}) i z wymuszeniem $f(t)$ (S'_{cl}). Wypisując różnicę przekonać się, że:

$$S'_{cl} - S_{cl} = \frac{i}{2\hbar}\int\int f(t)f(s)g(t,s)dtds + \int f(t)\overline{x}(t)dt.$$

   Różniczkując ten wzór ze względu na f otrzymujemy kolejno wzory, o które chodzi w zadaniu.