Mechanika Kwantowa

kurs dla doktorantów – 13 (20 i 21 luty 2001)

1. *Wyznacznik instantonowy.* Kontynuacja wyliczenia jawnym rachunkiem (tzn. tak jak w poprzednim zadaniu) czynnika

$$\tilde{K}^2 = \frac{\det'\left(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2} + \mathrm{V}''(\bar{\mathrm{x}}(\tau))\right)}{\det\left(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2} + 1\right)},$$

gdzie potencjał $V(x)$ ma postać: $V(x) = \kappa(a^2 - x^2)^2$ z $\kappa = 1/8a^2$.

Dotychczas pokazaliśmy, że

- równanie na wartości własne

$$\left[-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(\overline{x}(\tau))\right] y_n(\tau) = \lambda_n y_n(\tau).$$

odpowiada równaniu Schrödingera dla potencjału $-1/\cosh^2(\tau/2)$, które jest dyskutowane w podręczniku Landaua Lifszica (zad. 5 str. 81 i zad. 4 str 88 w wydaniu polskim PWN 1979).

- w zmiennej $u = (1-z)/2$, gdzie $z = \tanh(\tau/2)$, równanie na funkcję $w_n(z)$ zdefiniowaną jako

$$y_n(z) = (1-z^2)^\alpha w_n(z)$$

przyjmuje postać równania hypergeometrycznego

$$u(1-u)w'' + \{c - (a+b+1)u\}w' - abw = 0,$$

gdzie

$$F(a,b,c;u) = 1 + \frac{ab}{c}\frac{u}{1!} + ... + \frac{a(a+1)...(a+n)\, b(b+1)...(b+n)}{c(c+1)...(c+n)}\frac{u^n}{n!} + ...$$

oraz

$$a = 2\alpha - 2,\ b = 2\alpha + 3,\ c = 2\alpha + 1,\ \alpha^2 = -\varepsilon_n = 1 - \lambda_n.$$

Dla ujemnych ε_n α jest rzeczywiste i z warunku urwania nieskończonego szeregu $F(a,b,c;u)$ dostajemy dyskretne wartości własne λ_n.

- Aby znaleźć przyczynek od spektrum ciągłego należy najpierw pokazać, że nie zachodzi odbicie przy przejściu nad tym potencjałem. Własność tę wykorzystamy następnie do wyliczenia iloczynu wszystkich wartości własnych. W tym celu proszę zbadać asymptotykę dla 2 typów rozwiązań $\alpha = ik$ i $\alpha = -ik$, w granicy $\tau \to \infty$ (czyli $u \to 0$) oraz dla $\tau \to -\infty$ (czyli dla $u \to 1$). W tym drugim przypadku należy skorzystać z tożsamości

$$\begin{aligned} F(a,b,c;u) &= \frac{\Gamma(c)\,\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)} F(a,b,a+b-c+1;1-u) + \\ &\quad (1-u)^{c-a-b}\frac{\Gamma(c)\,\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)} F(c-a,c-b,c-a-b+1;1-u). \end{aligned}$$

- Jeżeli nie zachodzi odbicie, to funkcja falowa $y_k(\tau)$ o asymptotyce $\mathrm{e}^{ik\tau}$ dla $\tau \to \infty$ ma w granicy $\tau \to -\infty$ asymptotykę $\mathrm{e}^{ik\tau+i\delta_k}$, gdzie δ_k jest przesunięciem fazowym, a $k = i\sqrt{\lambda_n - 1}$. Pokazać, że:

  $$\mathrm{e}^{i\delta_k} = \frac{1+ik}{1-ik}\frac{1+2ik}{1-2ik}.$$

  Identyczny argument stosuje się dla funkcji o asymptotyce $\mathrm{e}^{-ik\tau}$

- Podobnie jak w przypadku oscylatora pełne rozwiązanie na funkcję falową widma ciągłego w pudle $-T/2 < \tau < T/2$ ma postać

  $$y_n(\tau) = Ay_{\alpha=ik}(\tau) + By_{\alpha=-ik}(\tau)$$

  a warunek kwantyzacji wyliczamy z warunków brzegowych używając asymptotycznych postaci funkcji $y_{\alpha=\pm ik}(\tau)$. Z warunku znikania funkcji falowej na brzegach przedziału dostajemy, że:

  $$Tk - \delta_k = \pi\ n$$

  Oznaczmy rozwiązania tego równania przez $\tilde{k}_n$. Podobnie można pokazać, że dla oscylatora harmonicznegi $k_n = \pi n/T$. Sąd część $\tilde{K}$ od widma ciągłego ma postać:

  $$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1+\tilde{k}_n^2}{1+k_n^2} = \exp\left(\sum_n \ln\frac{1+\tilde{k}_n^2}{1+k_n^2}\right) \approx \exp\left(\sum_n \frac{2k_n(\tilde{k}_n - k_n)}{1+k_n^2}\right).$$

- Wyrażenie to trzeba teraz 'uciąglić":

  $$\ldots = \exp\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} dk \frac{2\delta_k\ k}{1+k^2}\right) = \frac{1}{9}.$$

  Ostatnią równość otrzymuje się całkując przez części i wykorzystując podany wyżej wzór na fazę δ_k.

Pełny wynik otrzymuje się po domnożeniu przez niezerową wartość własną dla widma dyskretnego.