Mechanika Kwantowa

kurs dla doktorantów – 12 (23 i 24 styczeń 2001)

1. *Wyznacznik instantonowy.* Kontynuacja wyliczenia jawnym rachunkiem (tzn. tak jak w poprzednim zadaniu) czynnika

$$\tilde{K}^2 = \frac{\det'\left(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2} + \mathrm{V}''(\bar{\mathrm{x}}(\tau))\right)}{\det\left(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2} + 1\right)},$$

gdzie potencjał $V(x)$ ma postać: $V(x) = \kappa(a^2 - x^2)^2$ z $\kappa = 1/8a^2$. Prim przy wyznaczniku oznacza, że z wyznacznika wyrzucamy zerową wartość własną, $\bar{x}(\tau)$ jest trajektorią klasyczną.

WSKAZÓWKA:

- Proszę pokazać, że równanie na wartości własne

$$\left[-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(\overline{x}(\tau))\right] y_n(\tau) = \lambda_n y_n(\tau).$$

odpowiada równaniu Schrödingera dla potencjału $-1/\cosh^2(\tau/2)$, które jest dyskutowane w podręczniku Landaua Lifszica (zad. 5 str. 81 i zad. 4 str 88 w wydaniu polskim PWN 1979).

- Proszę znaleźć spektrum stanów związanych dla tego równania. W tym celu należy równanie to sprowadzić do równania hypergeometrycznego wprowadzając zmienną $z = \tanh(\tau/2)$, a następnie szukać rozwiązania w postaci:

$$y_n(z) = (1 - z^2)^\alpha w_n(z)$$

i ostatecznie przepisać równanie na $w_n(z)$ w zmiennej $u = (1-z)/2$. Równanie to przyjmuje postać równania hypergeometrycznego

$$u(1-u)w'' + \{c - (a+b+1)u\}w' - abw = 0,$$

gdzie

$$F(a,b,c;u) = 1 + \frac{ab}{c}\frac{u}{1!} + ... + \frac{a(a+1)...(a+n)\,b(b+1)...(b+n)}{c(c+1)...(c+n)}\,\frac{u^n}{n!} + ...$$

oraz

$$a = 2\alpha - 2,\ b = 2\alpha + 3,\ c = 2\alpha + 1,\ \alpha^2 = -\varepsilon_n = 1 - \lambda_n.$$

Dla ujemnych ε_n α jest rzeczywiste i z warunku urwania nieskończonego szeregu $F(a,b,c;u)$ dostajemy dyskretne wartości własne λ_n.

- Aby znaleźć przyczynek od spektrum ciągłego należy najpierw pokazać, że nie zachodzi odbicie przy przejściu nad tym potencjałem. Własność tę wykorzystamy następnie do wyliczenia iloczynu wszystkich wartości własnych. W tym celu proszę zbadać asymptotykę dla 2 typów rozwiązań $\alpha = ik$ i $\alpha = -ik$, w

granicy $\tau \to \infty$ (czyli $u \to 0$) oraz dla $\tau \to -\infty$ (czyli dla $u \to 1$). W tym drugim przypadku należy skorzystać z tożsamości

$$\begin{aligned} F(a,b,c;u) &= \frac{\Gamma(c)\,\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)}\,F(a,b,a+b-c+1;1-u) + \\ &\quad (1-u)^{c-a-b}\frac{\Gamma(c)\,\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}\,F(c-a,c-b,c-a-b+1;1-u). \end{aligned}$$

- Podobnie jak w przypadku oscylatora pełne rozwiązanie na funkcję falową widma ciągłego w pudle $-T/2 < \tau < T/2$ ma postać

$$y_n(\tau) = A y_{\alpha=ik}(\tau) + B y_{\alpha=-ik}(\tau) \tag{1}$$

a warunek kwantyzacji wyliczamy z warunków brzegowych używając asymptotycznych postaci funkcji $y_{\alpha=\pm ik}(\tau)$.