Mechanika Kwantowa

kurs dla doktorantów – 11 (16 i 17 styczeń 2001)

1. *Euklidesowy oscylator harmoniczny.* Znaleźć euklidesowy propagator dla oscylatora harmonicznego o masie $m = 1$ z warunkami brzegowymi $x(-T/2) = x(T/2) = 0$ i wyliczyć granicę dla $T \to \infty$. Porównać z propagatorem Minkowskiego przez dokonanie przejścia do urojonego czasu. Proszę rozwiązać zadanie bezpośrednim rachunkiem.

   WSKAZÓWKA. Zgodnie z dyskusją na wykładzie ruch euklidesowy to ruch w odwróconym potencjale. Stąd klasyczna trajektoria $\overline{x}(t) \equiv 0$. Pozostaje zatem do wyliczenia wyznacznik operatora $D(t) = -\partial_t^2 + \omega^2$. W tym celu trzeba rozwiązać problem własny
   $$D(t)\psi_n(t) = \lambda_n \psi_n(t)$$
   z warunkami brzegowymi $\psi_n(-T/2) = \psi_n(T/2) = 0$.

   Należy znaleźć zdyskretyzowane wartości własne λ_n i wymnożyć je, a następnie wykonać przejście graniczne $T \to \infty$. Należy przy tym skorzystać ze wzoru
   $$\sinh z = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{\pi^2 n^2}\right)$$
   (Abramowitz, Stegun: *Handbook of mathematical functions* 4.5.68). Metoda ta pozwala wyliczenie propagatora z dokładnością do stałej normalizacyjnej, niezależnej od ω, którą można znaleźć rozważając np. ruch swobodny.

2. *Wyznacznik instantonowy.* Celem tego zadania jest wyliczenie jawnym rachunkiem (tzn. tak jak w poprzednim zadaniu) czynnika
   $$\tilde{K} = \frac{\det'\left(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2} + \mathrm{V}''(\bar{\mathrm{x}}(\tau))\right)}{\det\left(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2} + 1\right)},$$
   gdzie potencjał $V(x)$ ma postać: $V(x) = \kappa(a^2 - x^2)^2$ z $\kappa = 1/8a^2$. Prim przy wyznaczniku oznacza, że z wyznacznika wyrzucamy zerową wartość własną, $\bar{x}(\tau)$ jest trajektorią klasyczną.

   WSKAZÓWKA:

   - Proszę najpierw znaleźć trajektorię klasyczną dla ruchu o zerowej energii od $-a$ do a w odwróconym potencjale $-V(x)$.
   - Proszę pokazać, że równanie na wartości własne
     $$\left[-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(\overline{x}(\tau))\right] y_n(\tau) = \lambda_n y_n(\tau).$$
     odpowiada równaniu Schrödingera dla potencjału $1/\cosh^2(\tau/2)$, które jest dyskutowane w podręczniku Landaua Lifszica (zad. 5 str. 81 i zad. 4 str 88 w wydaniu polskim PWN 1979).

- Proszę znaleźć spektrum stanów związanych dla tego równania. W tym celu należy równanie to sprowadzić do równania hypergeometrycznego wprowadzając zmienną $z = \tanh(\tau/2)$, a następnie szukać rozwiązania w postaci:

  $$y_n(z) = (1 - z^2)^{\alpha} w_n(z)$$

  i ostatecznie przepisać równanie na $w_n(z)$ w zmiennej $u = (1 - z)/2$.
- Aby znaleźć przyczynek od spektrum ciągłego należy najpierw pokazać, że nie zachodzi odbicie przy przejściu nad tym potencjałem. Własność tę wykorzystamy następnie do wyliczenia iloczynu wszystkich wartości własnych.