Mechanika Kwantowa dla doktorantów

zestaw 9 – 3 i 4.1.2001

1. Otrzymane w poprzednim zadaniu dotyczącym ruchu cząstki w polu magnetycznym działanie, a zatem i propagator nie są translacyjnie niezmiennicze. Jak zmienia się S_{cl} przy przesunięciu całego układu o wektor $\vec{\varepsilon}$? Niezmienniczość translacyjną można odzyskać wykonując równocześnie transformację cechowania na potencjale $\vec{A}$ opisującym stałe pole magnetyczne $\vec{B}$ skierowane wzdłuż osi z. Jaka to transformacja i jak zależy od wektora $\vec{\varepsilon}$?

   Wskazówka: Lagragian z poprzedniego zadania jest w rzeczywistości szczególnym przypadkiem Lagrangianu opisującego oddziaływanie cząstki naładowanej z potencjałem wektorowym:
   $$L = \frac{m}{2}\frac{d\vec{r}}{dt}^2 + \frac{q}{c}\frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{A}.$$
   Jaką postać ma potencjał $\vec{A}$, który sprowadza powyższy Lagrangian do poprzedniego?

2. Wyprowadzić półklasyczny warunek kwantowania dla nieskończonej studni potencjału i wyliczyć poziomy energetyczne. Porównać z wynikiem dokładnym.

3. Wychodząc z równania Schrödingera dla propagatora K:
   $$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}K(x,x_0;t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right]K(x,x_0;t),$$
   gdzie K spełnia warunek $K(x,x_0;t\to 0) = \delta(x-x_0)$, wyprowadzić formułę Van Vleck'a:
   $$F(T) = \left(-\frac{1}{2\pi i\hbar}\frac{\partial^2 S}{\partial x\partial x_0}\right)^{1/2}.$$
   Wskazówka: Wstawić do równania Schrödingera:
   $$K = \exp\left(\frac{i}{\hbar}S_{\mathrm{cl}} + \ln F + \ldots\right)$$
   i pogrupować wyrazy przy potęgach $\hbar$. W rzędzie zerowym dostaje się równanie Hamiltona-Jacobiego na działanie klasyczne:
   $$\partial_t S + \frac{1}{2m}(\partial_x S)^2 + V(x) = 0,$$
   a w pierwszym rzędzie równanie:
   $$\partial_t(\ln F) + \frac{1}{2m}\partial_x^2 S + \frac{1}{m}\partial_x S\partial_x(\ln F) = 0.$$
   Równanie to należy rozwiązać ze względu na $\ln F$. Można to zrobić zauważając, że różniczkując równanie Hamiltona-Jacobiego po x i po x_0 otrzymuje się równanie identyczne z równaniem rzędu $\hbar$, w którym $\ln F$ zastąpiono przez $\frac{1}{2}\ln\frac{\partial^2 S}{\partial x\partial x_0}$. Współczynnik proporcjonalności można wyznaczyć z warunku unormowania propagatora w granicy $t\to 0$.

4. Rozpatrzyć ruch o zadanej energii E w potencjale $V(x)$. Wykazać, że dla ruchu od x_1 do x_2 w czasie T zachodzi:

$$\frac{\partial^2 S_{cl}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{1}{2\sqrt{E - V(x_1)}\sqrt{E - V(x_2)}} \frac{\partial E}{\partial T}.$$

UWAGA: Ćwiczenia dla grupy wtorkowej odbędą się wyjątkowo we czwartek 4.1.2001 o godz. 9:00 w bibliotece preprintów, IV p.