Mechanika Kwantowa dla doktorantów

zestaw 8 – 19 i 20.12.2000

1. Dokończyć zadanie z poprzedniego zestawu, polegające na wyliczeniu działania klasycznego i propadatora dla cząstki, której funkcja Lagrange'a ma postać:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{eB}{2c}(x\dot{y} - y\dot{x}).$$

Wyliczyć propagator dla ruchu od punktu $\vec{a} = (x_a, y_a, z_a)$ do punktu $\vec{b} = (x_b, y_b, z_b)$ w czasie T. Sprawdzić wzór Van Vleck'a wyliczając

$$\det\left(-\frac{\partial^2 S_{cl}}{\partial\vec{a}\partial\vec{b}}\right).$$

2. Wychodząc z równania Schrödingera dla propagatora K:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}K(x, x_0; t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right]K(x, x_0; t),$$

gdzie K spełnia warunek $K(x, x_0; t \to 0) = \delta(x - x_0)$, wyprowadzić formułę Van Vleck'a:

$$F(T) = \left(-\frac{1}{2\pi i\hbar}\frac{\partial^2 S}{\partial x\partial x_0}\right)^{1/2}.$$

Wskazówka: Wstawić do równania Schrödingera:

$$K = \exp\left(\frac{i}{\hbar}S_{\rm cl} + \ln F + \ldots\right)$$

i pogrupować wyrazy przy potęgach $\hbar$. W rzędzie zerowym dostaje się równanie Hamiltona-Jacobiego na działanie klasyczne:

$$\partial_t S + \frac{1}{2m}(\partial_x S)^2 + V(x) = 0,$$

a w pierwszym rzędzie równanie:

$$\partial_t(\ln F) + \frac{1}{2m}\partial_x^2 S + \frac{1}{m}\partial_x S\partial_x(\ln F) = 0.$$

Równanie to należy rozwiązać ze względu na $\ln F$. Można to zrobić zauważając, że różniczkując równanie Hamiltona-Jacobiego po x i po x_0 otrzymuje się równanie identyczne z równaniem rzędu $\hbar$, w którym $\ln F$ zastąpiono przez $\frac{1}{2}\ln\frac{\partial^2 S}{\partial x\partial x_0}$. Współczynnik proporcjonalności można wyznaczyć z warunku unormowania propagatora w granicy $t \to 0$.

3. Rozpatrzyć ruch o zadanej energii E w potencjale $V(x)$. Wykazać, że dla ruchu od x_1 do x_2 w czasie T zachodzi:

$$\frac{\partial^2 S_{cl}}{\partial x_1\partial x_2} = \frac{1}{2\sqrt{E - V(x_1)}\sqrt{E - V(x_2)}}\frac{\partial E}{\partial T}.$$