Mechanika Kwantowa dla doktorantów

zestaw 3 – 18 i 24.10.2000

1. Wyprowadzić wzór z poprzednich ćwiczeń

$$e^{H_0+V} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \prod_{i=1}^{n+1} d\alpha_i \, \delta(1 - \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k) e^{\alpha_1 H_0} V e^{\alpha_2 H_0} V \ldots V e^{\alpha_{n+1} H_0} \, . \tag{1}$$

   przy pomocy równania różniczkowego. W tym celu definiujemy

$$\rho_0(\beta) = e^{\beta H_0}, \qquad \rho(\beta) = e^{\beta(H_0+V)}$$

   i konstruujemy r. różniczkowe

$$\frac{d}{d\beta}\left(e^{-\beta H_0}\rho(\beta)\right) = e^{-\beta H_0} V \rho(\beta),$$

   które należy scałkować po β' w granicach 0 do β. Otrzymane w ten sposób r. całkowe należy rozwiązać iteracyjnie. Wzór (1) otrzymuje się przez zmianę zmiennych całkowania i położenie $\beta = 1$.

2. Proszę sprawdzić, że dla $[V, H_0] = 0$ wzór (1) redukuje się do wzoru

$$e^{H_0+V} = e^{H_0} e^V.$$

3. Sprawdzić jawnym rachunkiem wzór na składanie propagatorów

$$K(b, a; t_b - t_a) = \int dc \, K(b, c; t_b - t_c) K(c, a; t_c - t_a)$$

   dla propagacji cząstki swobodnej. Sprawdzić, podstawiając za K propagator cząstki swobodnej, że spełnione jest równanie Schrödingera

$$-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial K}{\partial t_b} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 K}{\partial x_b^2}.$$

4. Pokazać, że krańcowe pęd p i energia E dla cząstki, której dynamika opisywana jest funkcją Lagrange'a L, wyrażają się przez pochodne działania klasycznego

$$S_{cl} = \int_{t_a}^{t_b} dt \, L(\dot{x}, x, t)$$

$$p|_{x_a} = \frac{\partial S_{cl}}{\partial x_a}, \;\; E|_{x_b} = \frac{\partial S_{cl}}{\partial t_b}.$$