Mechanika Kwantowa dla doktorantów
zestaw 2 – 11 i 17.10.2000

1. Na poprzednich ćwiczeniach wyprowadziliśmy wzór Bakera-Campbella-Hausdorffa dla operatora $C(t)$ zdefiniowanego jako:

$$e^{C(t)} = e^{A} e^{tB}.$$

Wyprowadziliśmy wzór na pochodną operatora $C(t)$:

$$\dot{C}(t) = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-)^{n+1}}{n(n+1)} (z-1)^n \right] B \ ,$$

gdzie

$$z = e^{\Delta_A} e^{t\Delta_B} \ .$$

Proszę wyliczyć kolejne dwa człony rozwinięcia aż do trzech komutatorów. Proszę powtórzyć rachunek dla

$$e^{C(t)} = e^{tA} e^{B}.$$

Wyprowadzenie to można znaleźć w dodatku D podręcznika J.M. Normanda „Rotations in Quantum Mechanics".

2. Udowodnić, że

$$e^{H_0+V} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \prod_{i=1}^{n+1} d\alpha_i \, \delta(1 - \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k) e^{\alpha_1 H_0} V e^{\alpha_2 H_0} V \ldots V e^{\alpha_{n+1} H_0} \ .$$

Dowód przeprowadza się wprowadzając „na chwilę" parametr t: $H_0 + tV$ i stosując rozwinięcie Taylora wokół $t = 1$. Można też skorzystać z wyprowadzonego już wzoru na $de^{C(t)}/dt$.