Zasada wariacyjna dla problemu trójciałowego
w zastosowaniu do cząstek zbudowanych z ciężkich kwarków

1 Zasada wariacyjna dla problemu trójciałowego

Na ćwiczeniach pokazaliśmy, że dla problemu dwuciałowego dla cząstek o równych masach m, po odseparowaniu ruchu środka masy, hamiltonian oddziaływania ma postać

$$H_{12} = \frac{p_{12}^2}{2\mu} + V_{12}, \tag{1}$$

względny pęd p_{ij} zdefiniowany jest jako

$$\vec{p}_{ij} = \frac{1}{2}(\vec{p}_i - \vec{p}_j) \tag{2}$$

a masa zredukowana wynosi

$$\mu = \frac{m}{2}. \tag{3}$$

W przypadku trójciałowym hamiltonian oddziaływania przyjmuje postać

$$H_{123} = \sum_{j>i=1}^{3} \left(\frac{p_{ij}^2}{2\mu'} + V_{ij} \right) = \sum_{j>i=1}^{3} H_{ij}(\mu'). \tag{4}$$

Masa zredukowana w hamiltonianie dwuciałowym wynosi w tym przypadku

$$\mu' = \frac{3}{4}m = \frac{3}{2}\mu. \tag{5}$$

Oznaczmy stan podstawowy hamiltonianu H_{123} przez $|\Omega\rangle$. Nie jest to stan podstawowy dla każdego H_{ij} z osobna. Obserwacja ta prowadzi do ograniczenia na energię stanu podstawowego hamiltonianu trójciałowego:

$$E^{(3)} = \langle\Omega| H_{123} |\Omega\rangle = \sum_{j>i=1}^{3} \langle\Omega| H_{ij}(\mu') |\Omega\rangle \geqslant 3E^{(2)}(\mu'). \tag{6}$$

Ostatnia nierówność wynika z faktu, że średnia z H_{ij} w stanie $|\Omega\rangle$ jest większa lub równa energii stanu podstawowego podsystemu dwuciałowego o masie zredukowanej μ'.

Wzór (6) można zastosować tylko w przypadku gdy oddziaływania dwuciałowe są takie same dla wszystkich cząstek i przyciągające (aby istniał stan związany). Przykładem takich oddziaływań są oddziaływania silne między kwarkami.

2 Oddzialywania między kwarkami

Do opisu stanu związanego kwarków należałoby stosować formalizm kwantowej teorii pola, gdzie oddziaływanie zachodzi poprzez wymianę gluonów (w elektrodynamice poprzez wymianę fotonów). Jednakże dla kwarków ciężkich można zastosować przybliżenie nierelatywistyczne. W tym celu trzeba zaproponować (znać) potencjał oddziaływania. W przypadku oddziaływań silnych odpowiednie ładunki (zwane ładunkami kolorowymi) nie są – tak jak w elektrodynamice – liczbami ale macierzami. Stąd potencjał oddziaływania coulombowskiego dwóch ładunków $e_{1,2}$ należy zastąpić przez

$$V = \frac{e_1 e_2}{r} \rightarrow W = \vec{T}^{(1)} \cdot \vec{T}^{(2)} \, V(r). \tag{7}$$

Wiadomo, ze funkcja $V(r)$ jest linowa dla dużych r (uwięzienie kwarków, tzw. *confinement*) i coulombowska dla małych r.

Macierze $\vec{T}^{(1,2)}$ są generatorami grupy SU(3) w reprezentacji fundamentalnej odpowiedni dla kwarku nr 1 i nr 2. Warto przypomnieć, że dla grupy SU(2) generatorami w reprezentacji fundamentalnej są trzy macierze Pauliego, $\vec{T} = 1/2\,\vec{\sigma}$, a dla grupy SU(3) jest to osiem $(N^2 - 1)$ macierzy Gell-Manna. Macierze te spełniają reguły komutacji

$$[T_i, T_j] = i f_{ijk} T_k, \tag{8}$$

gdzie stałe f_{ijk} są rzeczywiste i całkowicie antysymetryczne. Dla grupy SU(3) macierze T_i mają wymiar 3×3, dla grupy SU(2) oczywiście 2×2 a stałe $f_{ijk} = \varepsilon_{ijk}$.

Warto zauważyć, że sprzęgając w sposób zespolony relację (8) otrzymujemy

$$\left[-T_i^*, -T_j^*\right] = i f_{ijk}(-T_k^*). \tag{9}$$

Zatem macierze $-T_i^*$ spełniają tę samą relację komutacji co macierze T_i. Oznacza to, ze w rzeczywistości mamy dwie reprezentacje „fundamentalne". Dla grupy SU(2) istnieje taka macierz U, że

$$-T_i^* = U T_i U^\dagger, \tag{10}$$

a zatem reprezentacje te są unitarnie równoważne. Dla grup SU$(N > 2)$ taka macierz U nie iestnieje i reprezentacja fundamentalna T_i oraz reprezentacja do niej sprzężona $-T_i^*$ nie są równoważne.

W przypadku grupy SU(2) reprezentacje numerujemy przy pomocy wartości liczby kwantowej $j = 0, 1/2, 1, 3/2 \ldots$ lub prz pomocy wymiaru (liczby stanów) $d_j = 2j + 1$, czy wreszcie przy pomocy wartości operatora Casimira

$$C_j = \sum_i T_i^2 = j(j+1)\mathbf{1}. \tag{11}$$

Dla uproszczenia będziemy opuszczali trywialną macierz jednostkową $\mathbf{1}$.

W przypadku grupy SU(3) przyjęło się oznaczać reprezentację przy pomocy wymiaru i znaku sprzężenia dla reprezentacji sprzężonej. W rozważanym przez nas przypadku kwarki należą do reprezentacji 3 a antykwarki do reprezentacji $\bar{3}$.

Wartość iloczynu $\vec{T}^{(1)} \cdot \vec{T}^{(2)}$ we wzorze (7) zależy od tego, na jaką reprezentację złożymy dwie reprezentacje, do których należą cząstki (1) i (2). Przypomnijmy sobie, że dla grupy SU(2) dwie reprezentacje fundamentalne $j_{1,2} = 1/2$ mogą się złożyć na całkowite $j = 0$ (singlet) i $j = 1$ (tryplet). W przypadku grupy SU(3) składanie reprezentacji najlepiej wykonać przy pomocy tzw. diagramów Younga. Tutaj przytoczymy tylko wynik:

$$\begin{aligned} 3 \otimes \bar{3} &= 1 \oplus 8, \\ 3 \otimes 3 &= \bar{3} \oplus 6. \end{aligned} \tag{12}$$

Ponieważ cząstki fizyczne złożone z kwarków mają całkowity ładunek kolorowy 0 (tak jak atomy nie mają ładunku elektrycznego), czyli są singletami, czyli należą do reprezentacji 1. Zatem widzimy, że w najprostszym przypadku mamy dwie możliwości. Albo mamy cząstki złożone z kwarka i antykwarka, albo z dwóch kwarków w stanie $\bar{3}$, do którego dorzucamy trzeci kwark i składamy całość na singlet. Pierwsze to mezony $(q\bar{q})$, drugie to bariony (qqq).

Aby wyliczyć iloczyn $\vec{T}^{(1)} \cdot \vec{T}^{(2)}$ musimy określić do jakiej reprezentacji należy całkowity „kolor" $\vec{T} = \vec{T}^{(1)} + \vec{T}^{(2)}$. W tym celu zauważmy że:

$$\begin{aligned} \vec{T}^{\,2} &= \sum_i T_i^2 = C_F \text{ jeżeli } \vec{T} \in 3 \text{ lub } \bar{3}, \\ \vec{T}^{\,2} &= \sum_i T_i^2 = 0 \text{ jeżeli } \vec{T} \in 1. \end{aligned} \tag{13}$$

Zatem dla oddziaływania kwark-antykwark w mezonie, gdzie całkowite $\vec{T} \in 1$ mamy

$$\vec{T}^{\,2} = \left(\vec{T}^{(1)} + \vec{T}^{(2)}\right)^2 = \underbrace{\left(\vec{T}^{(1)}\right)^2}_{=C_F} + \underbrace{\left(\vec{T}^{(1)}\right)^{2^2}}_{=C_F} + 2\vec{T}^{(1)} \cdot \vec{T}^{(2)} = 0 \tag{14}$$

i dalej

$$\vec{T}^{(1)} \cdot \vec{T}^{(2)} = -C_F. \tag{15}$$

Dla dwóch kwarków, które składają się na $\bar{3}$ (a więc dwóch kwarków w barionie) mamy

$$\vec{T}^{\,2} = \left(\vec{T}^{(1)} + \vec{T}^{(2)}\right)^2 = \underbrace{\left(\vec{T}^{(1)}\right)^2}_{=C_F} + \underbrace{\left(\vec{T}^{(1)}\right)^{2^2}}_{=C_F} + 2\vec{T}^{(1)} \cdot \vec{T}^{(2)} = C_F \tag{16}$$

i dalej

$$\vec{T}^{(1)} \cdot \vec{T}^{(2)} = -\frac{1}{2} C_F. \tag{17}$$

A zatem mamy, że

$$W_{qq} = \frac{1}{2} W_{q\bar{q}}. \tag{18}$$

Oddziaływanie kwark-antykwark w mezonie jest dwa razy silniejsze niż oddziaływanie kwark-kwark w barionie.

Dygresja

Zauważmy, że powyższe rozważania przeprowadziliśmy bez znajomości wartości numerycznej C_F. Znając wartości numeryczne operatorów Casimira dla pozostałych reprezentacji R możemy znaleźć wartości numeryczne iloczynu $\vec{T}^{(1)} \cdot \vec{T}^{(2)}$ dla sumarycznego koloru 8 i 6. Mamy

$$C_1 = 0,\ C_F \stackrel{\text{def.}}{=} C_3 = C_{\bar{3}} = \frac{4}{3},\ C_6 = \frac{10}{3},\ C_A \stackrel{\text{def.}}{=} C_8 = 3. \tag{19}$$

Proszę sprawdzić, że

$$\vec{T}^{(1)} \cdot \vec{T}^{(2)}\Big|_6 = \frac{1}{3},\ \vec{T}^{(1)} \cdot \vec{T}^{(2)}\Big|_8 = \frac{1}{6}. \tag{20}$$

Jak widać, iloczyny te są dodatnie (w przeciwieństwie do przypadku, gdzie sumaryczny kolor jest singletem lub antytrójką), a zatem oddziaływanie w tych kanałach jest odpychające.

3 Zasada wariacyjna dla barionu

Wyprowadzona w poprzednim paragrafie relacja (18) pozwala powiązać oszacowania mas barionów i mezonów. A priori mogłoby być to niemożliwe, gdyż W_{qq} i $W_{q\bar{q}}$ mogły by być zupełnie inne. Dla barionu mamy zatem

$$\begin{aligned} H_{123} &= \sum_{j>i=1}^{3} \left(\frac{p_{ij}^2}{2\mu'} + W_{qq}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) \right) = \sum_{j>i=1}^{3} \left(\frac{p_{ij}^2}{2\mu'} + \frac{1}{2} W_{q\bar{q}}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j>i=1}^{3} \left(\frac{p_{ij}^2}{2\mu''} + W_{q\bar{q}}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) \right), \end{aligned} \tag{21}$$

gdzie $\mu'' = \mu'/2$. Do hamiltonianu

$$\sum_{j>i=1}^{3} \left(\frac{p_{ij}^2}{2\mu''} + W_{q\bar{q}}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) \right)$$

możemy teraz zastosować wzór (7), co pozwala nam oszacować energię barionu złożonego z trzech kwarków o masie m:

$$E^{(3)} \geqslant \frac{3}{2} E^{(2)}(\mu''). \tag{22}$$

Powstaje pytanie, jak powiązać $E^{(2)}(\mu'')$ z masą mezonu złożonego z takiego samego kwarka i jego antycząstki, gdyż w odpowiadającym mu systemie dwuciałowym znamy energię $E^{(2)}(\mu)$, a więc przy innej masie zredukowanej.

W przypadku ogólnego potencjału $V(r)$ we wzorze (7) wymagałoby to obliczeń numerycznych. Jednakże dobrym przybliżeniem może być użycie potencjału logarytmicznego, który ma własność (obserwowaną eksperymentalnie dla mezonów zbudowanych z ciężkich kwarków), że odległości pomiędzy poziomami o ustalonych liczbach kwantowych nie zależą od masy. Można to wykazać przeskalowując $\vec{r} \to \alpha\vec{r}$ i $\vec{p} \to \vec{p}/\alpha$ (zauważmy, że przeskalowanie $\vec{r}$ oznacza *de facto* zmianę jednostki wymiarowej długości, co nie wpływa na wartość energii):

$$H = \frac{p^2}{2\mu''} + g\ln\left(\frac{r}{r_0}\right) = \frac{p^2}{\underbrace{2\alpha^2\mu''}_{=\mu}} + g\ln\left(\frac{r}{r_0}\right) + g\ln\alpha. \tag{23}$$

Widzimy, ze energie Hamiltonianów

$$\frac{p^2}{2\mu''} + g\ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \text{ oraz } \frac{p^2}{2\mu} + g\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)$$

różnią się o stałą $g\ln\alpha = g\ln\sqrt{\mu/\mu''}$, a więc odległości pomiędzy poziomami energetycznymi są takie same.

Aby powiązać $E^{(2)}$ z energią mezonu musimy przyjąć, że $\mu = m/2$ (patrz (3)). Z kolei $\mu'' = \mu'/2 = 3m/8$ (patrz (5)). Zatem

$$E^{(2)}(\mu'') = E^{(2)}(\mu) + g\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}. \tag{24}$$

Masę cząstki złożonej z n oddziaływujących cząstek o masie m każda, wyliczamy ze wzoru Einsteina w przyblizeniu nierelatywistycznym:

$$M_n = nm + \frac{E^{(n)}}{c^2}. \tag{25}$$

Dobrym przykładem jest tu barion Ω złożony z trzech kwarków s oraz mezon φ złożony z kwarka s i antykwarka $\bar{s}$:

$$M_\Omega = 3m_s + \frac{E^{(3)}}{c^2},\ m_\varphi = 2m_s + \frac{E^{(2)}(\mu)}{c^2}. \tag{26}$$

Mamy teraz przy użyciu (22)

$$\begin{aligned} M_\Omega &\geqslant 3m_s + \frac{3}{2}\frac{E^{(2)}(\mu'')}{c^2} \\ &= 3m_s + \frac{3}{2}\frac{E^{(2)}(\mu)}{c^2} + \frac{3}{4}\frac{g}{c^2}\ln\frac{4}{3} \\ &= \frac{3}{2}\left(2m_s + \frac{E^{(2)}(\mu)}{c^2}\right) + \frac{3}{4}\frac{g}{c^2}\ln\frac{4}{3}, \end{aligned} \tag{27}$$

co daje w ostateczności

$$M_\Omega \geqslant \frac{3}{2}m_\varphi + \frac{3}{4}\frac{g}{c^2}\ln\frac{4}{3}. \tag{28}$$

W pracy z roku 1977 o ciężkich kwarkach Rosner i Quigg, badając rozszczepienia mezonów $c\bar{c}$ i $b\bar{b}$ oszacowali, że $g/c^2 \sim 750$ MeV. Ile powinno wynosić g/c^2 aby w równaniu (28) była równość?