Wybrane problemy kwantowo mechaniczne

zestaw 11

na dzień 17.1.2024. środa 16:35

sala A-1-03

Poziomy Landaua

Klasycznie ruch naładowanej cząstki w stałym polu magnetycznym skierowanym wzdłuż osi z odbywa się po spirali wzdłuż kierunku pola magnetycznego. Kwantowo ruch w kierunku osi z jest swobodny, natomiast ruch w płaszczyźnie $x - y$ jest skwantowany, co prowadzi do dyskretnego spektrum energii – tzw. poziomów Landaua. Celem tego zadania jest obliczenie energii poziomów Landaua ze szczególnym zwróceniem uwagi na ich degenerację. Zadanie to rozwiążemy na trzy różne sposoby.

1. Hamiltonian dla cząstki o ładunku q poruszającej się w polu magnetycznym przyjmuje postać:

$$H = \frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p} - \frac{q}{c}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)\right)^2, \tag{1}$$

gdzie q jest ładunkiem cząstki, zaś c prędkością światła. Aby rozwiązać odpowiednie równanie Schrödingera musimy wybrać cechowanie, które prowadzi do pola magnetycznego skierowanego wzdłuż osi z. Pole magnetyczne określone jest wzorem

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}.$$

Wykazać, że nastepujące dwa wybory prowadzą do takiego samego pola $\boldsymbol{B}$:

Cechowanie I

$$\boldsymbol{A} = B\begin{bmatrix} -y \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Cechowanie II

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}B\begin{bmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

2. Rozwiązać równanie Schrödingera w cechowaniu (2). W tym celu rozpisać równanie na składowe odpowiednio w zmiennych x, y i z. Przyjmując funkcję falową w postaci

$$\psi(x,y,z) = f(y)e^{-ip_x x/\hbar}e^{-ip_z z/\hbar}.$$

problem redukuje się do ruchu swobodnego w kierunku osi z oraz oscylatora harmonicznego w pewnej nowej zmiennej związanej z y o częstości

$$\tilde{\omega} = \frac{qB}{m_e c} = 2\omega$$

3. Rozpisać równanie Schrödingera w cechowaniu (3) na składowe w zmiennych x, y i z. Podobnie jak poprzednio będziemy mieli do czynienia z ruchem swobodnym wzdłuż osi z oraz dwoma oscylatorami w zmiennych x i y gdzie rolę potencjału kwadratowego pełnią człony kwadratowe w B. Człony liniowe w B należy potraktować jako zaburzenie.

   Najpierw należy rozwiązać problem bez członów liniowych w B. Zbadać degenerację poszczególnych poziomów. Następnie dla kilku najniższych poziomów należy obliczyć poprawkę od części liniowej w B. W tym celu zapisać zaburzenie przy pomocy operatorów kreacji i anihilacji i zastosować zdegenerowany rachunek zaburzeń. Spróbować uogólnić otrzymany wynik na wszystkie poziomy niezaburzone.

   Okazuje się, że otrzymuje się dokładny wynik z poprzedniego zadania, co oznacza, że nie ma poprawek od wyższych rzędów rachunku zaburzeń. Dlaczego? Przedyskutować degenrację.

4. Poziomy Landaua w cechowaniu (3) można obliczyć przy pomocy pewnego tricku. Rozpisany na składowe hamiltonian (1) w części zależnej od x i y należy zapisać wyciągając stałą

$$\frac{1}{2}\hbar\tilde{\omega}\,.$$

   Definiujemy operatory

$$\hat{\pi}_x = \frac{\hat{p}_x + \frac{1}{2}m_e\tilde{\omega}y}{\sqrt{m_e\hbar\tilde{\omega}}},\ \hat{\pi}_y = \frac{\hat{p}_y - \frac{1}{2}m_e\tilde{\omega}x}{\sqrt{m_e\hbar\tilde{\omega}}}$$

   Wyrazić przy pomocy tych operatorów hamiltonian (1). Zbadać komutator

$$[\hat{\pi}_x, \hat{\pi}_y]\ .$$

   Okaże się, że reguła komutacji jest taka jak dla p oraz x (z $\hbar = 1$). W związku z tym z operatorów $\hat{\pi}_x, \hat{\pi}_y$ można utworzyć kombinacje liniowe

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{\pi}_x + i\hat{\pi}_y\right),\ \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{\pi}_x - i\hat{\pi}_y\right)\ .$$

   Wykazać, że operatory te spełniają regułę komutacji operatorów kreacji i anihilacji. Wyrazić hamiltonian przez $\hat{a}$ i $\hat{a}^\dagger$. Znaleźć spektrum energii. Degenrację tak otrzymanego spektrum przedyskutujemy na zajęciach.