

Wybrane problemy kwantowo mechaniczne

zestaw 9

na dzień 20.12.2023. środa 16:35

sala A-1-03

Proszę wykonać obliczenia z poprzedniego zestawu

1. Problem trójciałowy dla równych mas daje się rozwiązać dokładnie w przypadku oddziaływania harmonicznego przy użyciu zmiennych Jacobiego:

$$\begin{aligned}\vec{R}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2), \quad \vec{R}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2\vec{r}_3 - \vec{r}_1 - \vec{r}_2), \quad \vec{R}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3), \\ \vec{Q}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{p}_1 - \vec{p}_2), \quad \vec{Q}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2\vec{p}_3 - \vec{p}_1 - \vec{p}_2), \quad \vec{Q}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3).\end{aligned}\quad (1)$$

Zbadać relacje komutacji między tymi operatorami.

2. Sprawdzić

$$\begin{aligned}Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2 &= p_1^2 + p_2^2 + p_3^2, \\ 3(R_1^2 + R_2^2) &= (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2 + (\vec{r}_1 - \vec{r}_3)^2 + (\vec{r}_3 - \vec{r}_2)^2.\end{aligned}\quad (2)$$

Kondensat Bosego-Einsteina

Obniżając temperaturę gazu atomów o spinie będącym liczbą naturalną (poniżej mikro kelwinów), można uzyskać stan, w którym prawie wszystkie atomy są w tym samym stanie kwantowym. Poniższe zadania ilustrują, jak taki system można badać przy użyciu metody wariacyjnej i jak jego własności zależą od znaku wzajemnego oddziaływania.

3. Oszacować metodą wariacyjną energię stanu podstawowego trójwymiarowego oscylatora harmonicznego

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\vec{r}^2$$

przymijając za funkcję próbną

$$\psi_\sigma(\vec{r}) = \frac{1}{(\sigma^2\pi)^{3/4}} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right),\quad (3)$$

gdzie σ jest parametrem wariacyjnym. Porównać otrzymany wynik z wynikiem dokładnym.

4. Przedyskutować własności spektrum dwóch nieoddziaływujących oscylatorów (wartości energii, degeneracje)

$$H = \frac{\vec{p}_1^2}{2m} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\vec{r}_1^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\vec{r}_2^2. \quad (4)$$

Jak wygląda funkcja falowa stanu podstawowego?

5. Załóżmy, że istnieje oddziaływanie pomiędzy dwoma cząstkami opisanymi hamiltonianem (4): $V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$. Oddziaływanie to jest krótkozasięgowe względem skali $a_0 = \sqrt{\hbar/(m\omega)}$ charakterystycznej dla badanego układu. Oznacza to, że dla dwóch funkcji f i g , które na odcinku rzędu a_0 są prawie stałe, można zastosować przybliżenie

$$\int \int f(\vec{r}_1)g(\vec{r}_2)V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)d^3\vec{r}_1d^3\vec{r}_2 \simeq \frac{4\pi\hbar^2}{m}a \int f(\vec{r})g(\vec{r})d^3\vec{r}. \quad (5)$$

Współczynnik proporcjonalności jest tak dobrany, aby można było zdefiniować stałą a o wymiarze długości, która nosi nazwę długości rozpraszania (scattering length). Stała ta może być ujemna (potencjał przyciągający) lub dodatnia (potencjał odpychający) i zależy od rodzaju atomów. Na przykład dla atomów sodu (izotop ^{32}Na) $a = 3,4$ nm, a dla litu (izotop ^7Li) $a = -1,5$ nm.

(a) Obliczyć w pierwszym rzędzie rachunku zaburzeń poprawkę do energii stanu podstawowego pochodzącą od oddziaływania $V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$. Skomentować zależność tej poprawki od znaku a .

(b) Przedyskutować stosowalność rachunku zaburzeń w zależności od wartości a i a_0 .