Wybrane problemy kwantowo mechaniczne

zestaw 7

na dzień 06.12.2023. środa 16:35

sala A-1-03

Mieszanie neutrin - dokończenie

1. Detekcja (antyneutrina) zachodzi poprzez reakcję

$$\bar{\nu}_l + p \to n + l^+ \tag{1}$$

gdzie $l^+ = \bar{e}, \bar{\mu}$. Czy można przy jej pomocy zaobserwować $\bar{\nu}_\mu$ jeżeli energia takiego neutrina wynosi 4 MeV? Masy cząstek wchodzących w tę reakcję wynoszą

$$m_\mu c^2 = 106 \text{ MeV}, \ m_p c^2 = 938.27 \text{ MeV}, \ m_n c^2 = 939.57 \text{ MeV}.$$

2. Dokładność detektorów zliczających neutrina poprzez reakcję (1) wynosi około 10%. Zakładając maksymalne mieszanie, tj. $\theta = \pi/4$, obliczyć minimalną odległość l_{min}, gdzie należy umieścić detektor, aby zaobserwować znaczący ubytek antyneutrin elektronowych powstałych w reaktorze. Jak l_{min} zależy od θ? Dla jakiego kąta θ dokładność detekcji 10% jest niewystarczająca, aby dało się zaobserwować oscylacje neutrin?

3. W rzeczywistości mieszanie zachodzi pomiędzy wszystkimi trzema rodzajami neutrin

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_{i=1}^{3} U_{\alpha i} |\nu_i\rangle \,, \ \alpha = e, \mu, \tau, \tag{2}$$

gdzie $U_{\alpha i}$ jest macierzą unitarną 3×3 (macierz Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata). Macierz tę można sparametryzować w następujący sposób (trzy kąty i jedna faza)

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\delta} & 0 & c_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

gdzie $c_{ij} = \cos\theta_{ij}$ oraz $s_{ij} = \sin\theta_{ij}$.

Na poprzednich zajęciach wyprowadziliśmy wzór na prawdopodobieństwo

$$\begin{aligned} P_{\alpha\to\beta}(t) \;&=\; \delta_{\alpha\beta} - 2\sum_{i,j} \mathrm{Re}\left[U_{\alpha i}U^*_{\beta i}U_{\beta j}U_{\alpha j}U^*_{\beta j}\right] \sin^2\left(\frac{\Delta E_{ij} t}{2}\right) \\ &\quad + \sum_{i,j} \mathrm{Im}\left[U_{\alpha i}U^*_{\beta i}U_{\beta j}U_{\alpha j}U^*_{\beta j}\right] \sin\left(\Delta E_{ij} t\right). \end{aligned} \tag{4}$$

Korzystając z parametryzacji (3) wykazać, że $\mathrm{Im}[\ldots] \sim \sin\delta$.

Rozpad beta jądra atomu trytu.

Tryt jest atomem, w którym jądro składa się z dwóch neutronów i jednego protonu. W przybliżeniu nieskończenie ciężkiego jądra poziomy energetyczne atomu trytu są identyczne z poziomami zwykłego atomu wodoru. W chwili t_0 jeden neutron w jądrze trytu rozpada się na proton, który pozostaje w jądrze, elektron o energii mniej więcej 15 keV i antyneutrino elektronowe. Rozpad zachodzi na tyle szybko, że funkcja falowa elektronu związanego w jądrze trytu (zakładamy, że elektron był w stanie podstawowym) pozostaje nie zmieniona. Jednakże nie jest to stan dozwolony dla nowopowstałego zjonizowanego atomu helu, gdyż ładunek elektryczny jadra helu jest równy $2e$. Oczywiście energia takiego układu jest większa od energii helu w stanie podstawowym. Celem zadania jest przedyskutowanie co stanie się z elektronem związanym w atomie, a w szczególności, czy może on „wylecieć" jako elektron swobodny.

4. Proszę przyponieć sobie rozwiązania na poziomy energetyczne w atomie wodoropodobnym. W szczególności chodzi o strukturę poziomów i ich degenerację, definicję promienia Bohra, funkcję falową stanu podstawowego.

5. Na początku elektron znajdował się w stanie podstawowym hamiltonianu dla atomu trytu, który oznaczymy jako $|\psi_0\rangle$. Obliczyć (podając wartość numeryczną) średnią wartość energii zjonizowanego atomu helu w tym stanie i porównać z energiami pierwszych kilku poziomów zjonizowanego atomu helu.

6. Napisać wzór na amplitudę prawdopodobieństwa, że elektron w stanie $|\psi_0\rangle$ znajdzie się w stanie $|n, l, m\rangle$ zjonizowanego atomu helu. Które z tych amplitud nie znikają? Obliczyć tę amplitudę dla stanu podstawowego $|1, 0, 0\rangle$ oraz podać odpowiadające mu prawdopodobieństwo (numerycznie).