Wybrane problemy kwantowo mechaniczne

zestaw 5
na dzień 22.11.2023. środa 16:35
sala A-1-03

Kryptografia kwantowa
Stan początkowy cząstek a i b o spinie 1/2 jest

$$|\Sigma\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{|a:+\rangle\,|b:+\rangle + |a:-\rangle\,|b:-\rangle\} \,. \tag{1}$$

Cząstki przygotowane w stanie (1) rozlatują się w dwu przeciwnych kierunkach. W tym zadaniu spróbujemy skonstruować algorytm przekazania poufnej informacji Bolkowi przez Alicję, tak aby zminimalizować mozliwość ingerencji szpiega.

1. Aby przekazać poufną informację (informacja to sekwencja bitów $+ + - - + \ldots$) Alicja i Bolek przyjmują następującą procedurę:

   (a) Alicja i Bolek decydują najpierw, względem których osi dokonywać będą pomiarów (synchronizacja układów współrzędnych).

   (b) Alicja, która ma kontrolę nad źródłem Z, przygotowuje uporządkowaną sekwencję $N \gg n$ dwójek spinów w stanie (1), gdzie n jest liczbą bitów w przesyłanej wiadomości. Alicja wysyła Bolkowi cząstki b a sama zachowuje cząstki a.

   (c) Na każdej cząstce, która do nich dociera, najpierw Alicja a potem Bolek dokonują pomiaru składowej x lub z spinu. Każde z nich wybiera kierunek x lub z w sposób przypadkowy z prawdopodobieństwem 1/2. Dla danej pary spinów (a, b) nie ma korelacji między wyborem osi przez Alicję i przez Bolka. Oboje zapisują otrzymane wyniki.

   (d) Bolek wybiera ułamek F z N dokonanych pomiarów. We wszystkich tych przypadkach przekazuje Alicji przez telefon oś pomiaru i jego wynik. W praktyce $F \sim 1/2$.

   (e) W wybranych przez Bolka przypadkach, Alicja porównuje swoje wyniki z wynikami Bolka i w ten sposób stwierdza, czy w proces przekazywania wiadomości wmieszał się agent S. Jeśli odkrywa agenta, to zawiadamia policję lub CBŚ, a proces przekazywania informacji zostaje zakończony. Jeżeli agent nie został wykryty to:

   (f) Alicja otwarcie przyznaje, że agenta nie było, a Bolek przekazuje jej przez telefon osie względem których mierzył spin w pozostałych przypadkach. Jednak nie podaje wyników pomiarów.

   (g) ....

Jak musi wyglądać punkt (g) aby dokonała się poufna transmisja informacji do Bolka bez dodatkowego wysyłania spinów (tj. tylko na podstawie sekwencji już wysłanych N spinów). Proszę skomentować skuteczność zaproponowanej procedury. Jak Alicja może stwierdzić obecność agenta? Jakie jest prawdopodobieństwo niewykrycia agenta (np. dla $FN = 200$)? Czy agent może się „zamaskować" jeśli zna usytuowanie osi wybranych przez Alicję i Bolka?

Mieszanie neutrin

Jedną z cech oddziaływań słabych (rozpad beta), jest to, że stany własne hamiltonianu oddziaływania są różne od stanów własnych hamiltonianu swobodnego. Dotyczy to zarówno kwarków jak i neutrin. W przypadku neutrin stany własne hamiltonianu swobodnego (zwane też stanami masowymi) oznaczamy $|\nu_i\rangle$, gdzie $i = 1, 2, 3$ (choć na początek „dla rozgrzewki" przyjmiemy, że mamy tylko dwa takie stany), natomiast stany własne hamiltonianu oddziaływania (a więc takie te stany które „widzimy" w detektorze, gdyż detekcja odbywa się poprzez oddziaływanie słabe neutrina z materiałem w detektorze) zwane stanami fizycznymi, to $|\nu_\alpha\rangle$, gdzie $\alpha = e, \mu, \tau$. Wiadomo, że masy $m_{1,2,3}$ są mniejsze od ułamka elektronovolta (masa elektronu to 0.5 MeV, czyli 500 000 razy więcej), natomiast różnice ich kwadratów $\Delta m_{ij}^2 = \left|m_i^2 - m_j^2\right|$: $\Delta m_{12}^2 \sim 7.1 \times 10^{-5}\text{eV}^2$, $\Delta m_{32}^2 \sim 2.5 \times 10^{-3}\text{eV}^2$.

Typowym źródłem neutrin są reaktory jądrowe, które produkują $\bar{\nu}_e$ o energiach rzędu 4 MeV. W górnych warstwach atmosfery cząstki promieniowania kosmicznego produkują neutrina o typowych energiach powyżej 100 MeV. Z kolei neutrina produkowane przez słońce mają energie rzędu kilkunastu MeV.

2. W zasadzie, aby dyskutować propagację neutrin (cząstek relatywistycznych), należałoby użyć równania Diraka. Jednakże dla energii (pędów) znacznie większych od masy cząstki mozemy użyć zależnego od czasu równania Schrödingera z hamiltonianem
$$H = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}. \tag{2}$$
Rozwinąć H do pierwszego rzędu w m^2/p^2.

   Znaleźć ewolucję czasową dwóch neutrin o masach $m_{1,2}$. Najwygodniej zrobić to w reprezentacji pędowej.

3. Stany fizyczne powiązane są ze stanami masowymi relacją
$$\begin{aligned} |\nu_e\rangle &= |\nu_1\rangle \cos\theta + |\nu_2\rangle \sin\theta \\ |\nu_\mu\rangle &= -\,|\nu_1\rangle \sin\theta + |\nu_2\rangle \cos\theta. \end{aligned} \tag{3}$$
Dotyczy to zarówno neutrin jak i antyneutrin.

   W chwili $t = 0$ w reaktorze produkuje sią (anty)neutrino elektronowe o pędzie p: $|\nu(t = 0)\rangle = |\nu_e\rangle$. Obliczyć prawdopodobieństwo, $P_e(t)$ detekcji neutrina elektronowego w chwili $t > 0$. Prawdopodobieństwo to wyrazić przez tzw. długość oscylacji

$$L = \frac{4\pi\hbar p}{\Delta m_{12}^2}. \tag{4}$$

gdzie $\Delta m_{ij}^2 = \left|m_i^2 - m_j^2\right|$.

Obliczyć L dla $E \simeq pc = 4$ MeV oraz $\Delta m_{12}^2 c^4 \simeq 10^{-4}$ eV^2. Przyjmując, że odległość pokonana przez neutrino w czasie t wynosi $l = ct$ wykreślić (np. przy pomocy pakietu *Mathematica*) $P_e(l)$.