

# Wybrane problemy kwantowo mechaniczne

zestaw 4

na dzień 15.11.2023. środa 16:35

sala A-1-03

Zajmiemy się problemem kolapsu funkcji falowej, paradoksem Einsteina-Rosena-Podolskiego i nierównością Bella. Problemy te najlepiej zilustrować przy pomocy pomiarów spinu.

1. Załóżmy że stan, na który dysocjuje atom wodoru jest stanem iloczynowym (a więc nie jest stanem splątany w przeciwieństwie do stanu singletowego) i wprowadźmy ukrytą zmienną w postaci kąta kwantyzacji  $\theta$ :

$$|\psi, \theta\rangle = |e : +\rangle_{\theta} |p : -\rangle_{\theta}.$$

Ponieważ kąt  $\theta$  jest nieznan, wszystkie średnie liczone są jako średniowanie po kącie  $\theta$  z pewnym rozkładem prawdopodobieństwa:

$$\langle \mathcal{O} \rangle_{\psi} = \int_0^{2\pi} d\theta P(\theta) {}_{\theta} \langle p : - | {}_{\theta} \langle e : + | \mathcal{O} | e : + \rangle_{\theta} | p : - \rangle_{\theta}.$$

Przyjmując jednorodny rozkład prawdopodobieństwa

$$P(\theta) = \frac{1}{2\pi}$$

obliczyć:  $\langle S_{\alpha}^e \rangle_{\psi}$ ,  $\langle S_{\beta}^p \rangle_{\psi}$  oraz  $\langle S_{\alpha}^e \otimes S_{\beta}^p \rangle_{\psi}$  i ostatecznie  $E_{\psi}(\alpha, \beta)$ .

## Kryptografia kwantowa

2. Stan początkowy cząstek  $a$  i  $b$  o spinie  $1/2$  jest

$$|\Sigma\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ |+\rangle_{\alpha} |+\rangle_{\beta} + |-\rangle_{\alpha} |-\rangle_{\beta} \right\}. \quad (1)$$

Cząstki przygotowane w stanie (1) rozlatują się w dwu przeciwnych kierunkach. Najpierw Alicja mierzy składową spinu cząstki  $a$  wzdłuż osi  $\vec{n}_{\alpha}$ , później Bolek mierzy spin cząstki  $b$  względem osi  $\vec{n}_{\beta}$ . Rozważmy przypadek kiedy  $\alpha = 0$ . Przypuśćmy, że agent S, ukryty między źródłem a Bolkiem mierzy spin cząstki  $b$  wzdłuż osi  $n_{\theta}$  zanim cząstka  $b$  dotrze do Bolka.

- Jakie wyniki otrzyma agent S w zależności od wyników otrzymanych przez Alicję?

- Następnie po pomiarze dokonany przez agenta S, Bolek mierzy spin  $b$  dla kąta  $\beta = 0$ . Jakie wyniki otrzymuje Bolek w zależności od wyników pomiarów agenta? Jakie są prawdopodobieństwa ich otrzymania?
- Jakie jest prawdopodobieństwo  $P(\theta)$ , że Alicja i Bolek otrzymają te same rezultaty, po pomiarze dokonany przez agenta S?
- Jaka jest wartość oczekiwana  $P(\theta)$ , jeżeli agent S wybiera kąt  $\theta$  w sposób przypadkowy z przedziału  $[0, 2\pi]$  z jednorodnym rozkładem prawdopodobieństwa?
- Jaka jest wartość oczekiwana  $P(\theta)$ , jeżeli agent S wybiera kąt  $\theta = 0$  lub  $\theta = \pi/2$  z prawdopodobieństwami  $1/2$ ?