Wybrane problemy kwantowo mechaniczne

zestaw 1– Kot Schrödingera
na dzień 11.10.2023. środa 16:30
sala A-1-03

Jeden z problemów interpretacyjnych mechaniki kwantowej polega na tym, że układ może znajdować się w superpozycji dwóch stanów $|\phi\rangle$ i $|\psi\rangle$,

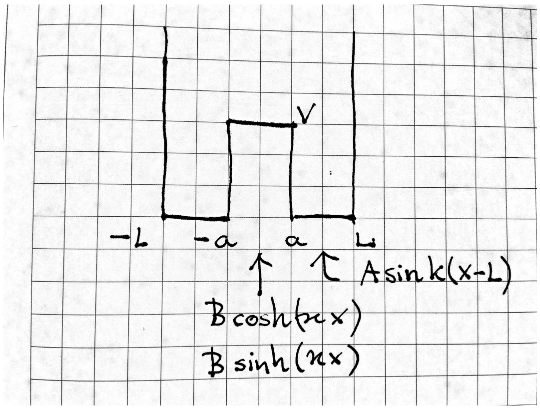
$$\sqrt{\frac{1}{2}}\left(|\phi\rangle + |\psi\rangle\right)$$

nawet jeśli klasycznie przebywanie w jednym z tych stanów wyklucza drugi. Typowym przykładem jest superpozycja dwóch stanów kota - żywego lub martwego. Podczas gdy kwantowa superpozycja stanów mikroskopowych nie jest szczególnie dziwna i jest niezbędna dla kwantowych efektów interferencyjnych, superpozycja makroskopowych, klasycznych stanów (takich jak kot) wydaje się paradoksalna. Istnieje jedna bardzo ważna cecha, która definiuje stan makroskopowy: jest to stan, który sam w sobie jest superpozycją dużej liczby pojedynczych stanów mikroskopowych. Dobrym modelem stanu klasycznego są stany koherentne. Pokażemy, że możliwe jest skonstruowanie superpozycji klasycznych stanów antynomicznych, jednak takie superpozycje są praktycznie niewykrywalne i bardzo niestabilne.

Zaczniemy jednak od superpozycji stanów kwantowych rozważając potencjał o dwóch minimach.

1. Proszę rozważyć podwójną studnię potencjału przedstawioną na rysunku i znaleźć dwa najniższe poziomy energetyczne $0 < E < V$ i odpowiadające im znormalizowane funkcje falowe (symetryczną i antysymetryczną). Dla prostoty przyjąć $m = \hbar = a = 1$, $L = 2$. Natomiast wysokość bariery utrzymać jako zmienną. Dla konkretnego, wybranego V wykreślić funkcję falową, która w chwili $t = 0$ zlokalizowana jest w jednym z minimów i rozważyć ewolucję czasową rozkładu prawdopodobieństwa. Ile wynosi czas przejścia z jednego minimum do drugiego? Obliczenia wykonać przy pomocy pakietu *Mathematica.*

   WSKAZÓWKA
   Aby uprościć rozwiązania, warto rozpatrzyć osobno rozwiązania symetryczne lub antysymetryczne. Wówczas wystarczy rozważyć tylko połowę studni, np. dla $x > 0$, tak jak to zasugerowane jest na rysunku. Na zewnątrz bariery funkcja falowa jest sumą eksponent $e^{\pm ikx}$ znikającą w $x = L$, a wewnątrz bariery symetryczną lub antysymetryczną sumą exponent $e^{\pm\kappa x}$. Warunki kwantyzacji otrzymuje się zszywając te dwie funkcje w $x = a$.



2. Znaleźć unormowane stany własne operatora anihilacji[1] (stany koherentne)

$$\hat{a}\,|z\rangle = z\,|z\rangle\,,$$

gdzie z jest liczbą zespoloną. W tym celu rozłożyć stan $|z\rangle$ na nieskończony szereg stanów własnych operatora $\hat{a}^\dagger\hat{a}$ i wyprowadzić regułę rekurencyjną dla współczynników tego rozwinięcia. Obliczyć iloczyn skalarny $\langle z'\,|z\rangle$. Wykazać, że stany $|z\rangle$ tworzą układ zupełny:

$$\frac{1}{\pi}\int d^2z\;|z\rangle\,\langle z| = \hat{\mathbf{1}}.$$

3. Znaleźć funkcje falowe odpowiadające stanowi $|z\rangle$ zarówno w reprezentacji położeniowej jak i pędowej:

$$\psi_z(x) = \langle x\,|z\rangle\,,\ \tilde{\psi}_z(p) = \langle p\,|z\rangle\,.$$

WSKAZÓWKA
W celu znalezienia ww funkcji należy rozwiązać równanie różniczkowe $\hat{a}\,|z\rangle = z\,|z\rangle$ wyrażając operator $\hat{a}$ przez operatory $\hat{x}$ oraz $\hat{p}$. W reprezentacji położeniowej $\hat{x} = x$ i $\hat{p} = -i\hbar\, d/dx$, a w reprezentacji pędowej $\hat{x} = i\hbar\, d/dp$ i $\hat{p} = p$.

[1] Definicję operatorów anihilacji i kreacji można znaleźć w dowolnym podręczniku mechaniki kwantowej w rozdziale, gdzie dyskutowany jest oscylator harmoniczny.