Mechanika Kwantowa

kurs dla doktorantów – 9 (14.12.99)

1. W oparciu o metody dyskutowane na wykładzie wyprowadzić półklasyczny warunek kwantowania dla nieskończonej studni potencjału i wyliczyć poziomy energetyczne. Porównać z wynikiem dokładnym.

2. Rozpatrzyć ruch o zadanej energii E w potencjale $V(x)$. Wykazać, że dla ruchu od x_1 do x_2 w czasie T zachodzi:

$$\frac{\partial^2 S_{cl}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{1}{2\sqrt{E - V(x_1)}\sqrt{E - V(x_2)}} \frac{\partial E}{\partial T}.$$

3. Proszę przypomnieć sobie, korzystając z dowolnego podręcznika mechaniki kwantowej, jak wyprowadza się półklasyczne warunki kwantowania. Na ogół przy wyprowadzaniu tych reguł zakłada się tzw. liniowy punkt zwrotu, tzn. że rozwinięcie potencjału wokół klasycznych punktów zwrotu x_+ i x_- ma postać:

$$V(x) \approx E \mp V_{\mp}(x - x_{\mp})^{s_{\mp}},$$

   gdzie potęgi $s_+ = s_- = 1$. Czy warunki kwantowania zależą od wartości $s_\pm$?

4. Pokazać, że w przybliżeniu WKB średnia wartość (w stanie związanym ψ_n) energii kinetycznej T dana jest wzorem:

$$\langle T \rangle_n = \frac{1}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{dE_n}{dn}.$$

   WSKAZÓWKA: Zastosować semiklasyczne wyrażenia na funkcję falową i pominąć przyczynki zanikające exponencjalnie. Następnie skorzystać z warunku stosowalności przybliżenia WKB, który można zapisać jako:

$$\frac{\hbar^2 p'^{\,2}}{p^3} \ll p.$$

   Pochodna dE_n/dn pojawia się ze zróżniczkowania związku:

$$h(n + \frac{1}{2}) = 2\int_{x_-}^{x_+} \sqrt{2m(E_n - V(x))}$$

   po dn.

5. Korzystając z wyników dwu poprzednich zadań i z twierdzenia o wiriale:

$$2\,\langle T \rangle_n = \langle x\; V'(x) \rangle_n$$

   znaleźć dyskretne wartości energii dla cząstki poruszającej się w potencjale

$$V(x) = V_o\, x^s.$$