Mechanika Kwantowa
kurs dla doktorantów – 8 (7.12.99)

1. Na poprzednich ćwiczeniach wyliczyliśmy działanie klasyczne dla cząstki opisanej funkcją Lagrange'a:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{eB}{2c}(x\dot{y} - y\dot{x}),$$

$$S_{cl} = \frac{m}{2}\left\{\frac{(Z_b - Z_a)^2}{T} + \frac{\omega}{2\sin\frac{\omega}{2}T}\left[\left(X_a^2 + Y_a^2 + X_b^2 + Y_b^2\right)\cos\frac{\omega}{2}T - 2X_aX_b - 2Y_aY_b\right]\right\}.$$

Wyrazić S_{cl} przez wyjściowe zmienne, wyliczyć macierz

$$\frac{\partial^2 S_{cl}}{\partial\vec{a}\partial\vec{b}},$$

gdzie $\vec{a} = (x_a, y_a, z_a)$ i $\vec{b} = (x_b, y_b, z_b)$, i sprawdzić formułę Van Vleck'a.

2. Otrzymane w poprzednim zadaniu działanie, a zatem i propagator nie są translacyjnie niezmiennicze. Jak zmienia się S_{cl} przy przesunięciu całego układu o wektor $\overrightarrow{\varepsilon}$? Niezmienniczość translacyjną można odzyskać wykonując równocześnie transformację cechowania na potencjale $\overrightarrow{A}$ opisującym stałe pole magnetyczne $\overrightarrow{B}$ skierowane wzdłuż osi z. Jaka to transformacja i jak zależy od wektora $\overrightarrow{\varepsilon}$?

   Wskazówka: Lagragian z poprzedniego zadania jest w rzeczywistości szczególnym przypadkiem Lagrangianu opisującego oddziaływanie cząstki naładowanej z potencjałem wektorowym:

$$L = \frac{m}{2}\frac{d\overrightarrow{r}}{dt}^2 + \frac{q}{c}\frac{d\overrightarrow{r}}{dt}\cdot\overrightarrow{A}.$$

   Jaką postać ma potencjał $\overrightarrow{A}$, który sprowadza powyższy Lagrangian do poprzedniego?

3. Wyprowadzić półklasyczny warunek kwantowania dla nieskończonej studni potencjału i wyliczyć poziomy energetyczne. Porównać z wynikiem dokładnym.

4. Rozpatrzyć ruch o zadanej energii E w potencjale $V(x)$. Wykazać, że dla ruchu od x_1 do x_2 w czasie T zachodzi:

$$\frac{\partial^2 S_{cl}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{1}{2\sqrt{E - V(x_1)}\sqrt{E - V(x_2)}}\frac{\partial E}{\partial T}.$$