Mechanika Kwantowa
kurs dla doktorantów – 7

1. Wychodząc z równania Schrödingera dla propagatora K:
$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}K(x,x_0;t)=\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+V(x)\right]K(x,x_0;t),$$
gdzie K spełnia warunek $K(x,x_0;t\to 0)=\delta(x-x_0)$, wyprowadzić formułę Van Vleck'a:
$$F(T)=\left(-\frac{1}{2\pi i\hbar}\frac{\partial^2 S}{\partial x\partial x_0}\right)^{1/2}.$$
Wskazówka: Wstawić do równania Schrödingera:
$$K=\exp\left(\frac{i}{\hbar}S_{\rm cl}+\ln F+\ldots\right)$$
i pogrupować wyrazy przy potęgach $\hbar$. W rzędzie zerowym dostaje się równanie Hamiltona-Jacobiego na działanie klasyczne:
$$\partial_t S+\frac{1}{2m}(\partial_x S)^2+V(x)=0,$$
a w pierwszym rzędzie równanie:
$$\partial_t(\ln F)+\frac{1}{2m}\partial_x^2 S+\frac{1}{m}\partial_x S\partial_x(\ln F)=0.$$
Równanie to należy rozwiązać ze względu na $\ln F$. Można to zrobić zauważając, że różniczkując równanie Hamiltona-Jacobiego po x i po x_0 otrzymuje się równanie identyczne z równaniem rzędu $\hbar$, w którym $\ln F$ zastąpiono przez $\frac{1}{2}\ln\frac{\partial^2 S}{\partial x\partial x_0}$. Współczynnik proporcjonalności można wyznaczyć z warunku unormowania propagatora w granicy $t\to 0$.

2. Cząstka o masie m i ładunku e porusza się w stałym polu magnetycznym B skierowanym wzdłuż osi z. Funkcja Lagrange'a dla tego przypadku ma postać:
$$L=\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)+\frac{eB}{2c}(x\dot{y}-y\dot{x}).$$
Wyliczyć propagator dla ruchu od punktu $\vec{a}=(x_a,y_a,z_a)$ do punktu $\vec{b}=(x_b,y_b,z_b)$ w czasie T. Sprawdzić wzór Van Vleck'a wyliczając
$$\det\left(-\frac{\partial^2 S_{cl}}{\partial\vec{a}\partial\vec{b}}\right).$$
Wsakzówka: Działanie S_{cl} najlepiej wyliczyć we współrzędnych walcowych:
$$x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi,\ z.$$
Po wyliczeniu funkcji Lagrange'a w tych zmiennych okaże się, że wygodnie jest użyć nowej zmiennej $\phi=\varphi+\omega t/2$, gdzie $\omega=eB/mc$. Odpowiada to przejściu do układu obracającego się z prędkością $\omega/2$. W tym nowym układzie funkcja Lagrange'e separuje się na trzy niezależne funkcje opisujące ruch cząstki swobodnej i dwa oscylatory harmoniczne. Pozwala to na natychmiastowe napisanie propagatora, który następnie trzeba przepisać w zmiennych wyjściowych.