# Mechanika Kwantowa

kurs dla doktorantów – 6

1. Komputerowa symulacja metodą Metropolisa.
2. Wyliczyć propagator dla oscylatora harmonicznego ze stałą siłą wymuszającą całkując ogólny wzór z poprzedniego zadania. Porównać ze wzorem otrzymanym bezpośrednim rachunkiem, polegającym na dopełnieniu funkcji Lagrange'a do pełenego kwadratu i odpowiedniej zamianie zmiennych. W tych nowych zmiennych Lagrangian ma postać stałej plus Lagragian dla oscylatora niewymuszonego.
3. Znaleźć jądro $K$ dla cząstki opisanej funkcją Lagrange'a:
$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + fx.$$
Rachunek można wykonać albo bezpośrednio, albo ze wzoru na propagator oscylatora wymuszonego stałą siłą, badając granicę $\omega \to 0$.
4. Wychodząc z równania Schrödingera dla propagatora $K$:
$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}K(x,x_0;t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right]K(x,x_0;t),$$
gdzie $K$ spełnia warunek $K(x,x_0;t\to 0) = \delta(x-x_0)$, wyprowadzić formułę Van Vleck'a:
$$K(x,x_0;t) = \left(-\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial x_0}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{i}{\hbar}S_{\mathrm{cl}}\right)(1+\ldots),$$
gdzie kropki oznaczają poprawki rzędu $\hbar$.

Wskazówka: Wstawić do równania Schrödingera:
$$K = \exp\left(\frac{i}{\hbar}S_{\mathrm{cl}} + \mathrm{ln}F + \ldots\right)$$
i pogrupować wyrazy przy potęgach $\hbar$. W rzędzie zerowym dostaje się równanie Hamiltona-Jacobiego na działanie klasyczne:
$$\partial_t S + \frac{1}{2m}(\partial_x S)^2 + V(x) = 0,$$
a w pierwszym rzędzie równanie:
$$\partial_t(\mathrm{ln}F) + \frac{1}{2m}\partial_x^2 S + \frac{1}{m}\partial_x S \partial_x(\mathrm{ln}F) = 0.$$
Równanie to należy rozwiązać ze względu na $\mathrm{ln}F$. Można to zrobić zauważając, że różniczkując równanie Hamiltona-Jacobiego po $x$ i po $x_0$ otrzymuje się równanie identyczne z równaniem rzędu $\hbar$, w którym $\mathrm{ln}F$ zastąpiono przez $\frac{1}{2}\mathrm{ln}\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial x_0}$.