Mechanika Kwantowa-4

kurs dla doktorantów

1. Pokazać, że funkcja falowa dana wzorem

$$\psi(x_2,t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x_2,t_2;x_1,t_1)\psi(x_1,t_1)\,dx_1,$$

   gdzie K jest dane jako całka po trajektoriach, spełnia równanie Schrödingera. W tym celu w rozważyć przypadek: $t_2 = t_1 + \epsilon$, gdzie ϵ jest krokiem czasowym w definicji całki po trajektoriach. Z kolei $x_1 = x_2 - \eta$. Przedyskutować związek między η a ϵ i przeprowadzić rozwinięcie w tych parametrach (Feynman Hibbs rozdział 4-1).

2. Przedyskutować otrzymany na poprzednich ćwiczeniach wzór na klasyczne działanie dla oscylatora harmonicznego. W szczególności rozważyć przypadek $\sin\omega T = 0$.

3. Korzystając ze związku:

$$K(x_b,x_a;T) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{i}{\hbar}E_nT}\phi_n(x_b)\phi_n^\star(x_a)\,,$$

   znaleźć energie własne E_n i wektory własne $\phi_n(x)$ dla $n = 0$, 1 i 2 dla oscylatora harmonicznego. W tym celu użyć dla K wzoru:

$$K(x_b,x_a;T) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i\,\sin\omega T}}e^{\frac{i}{\hbar}S_{\mathrm{cl}}}\,,$$

   gdzie S_{cl} jest działaniem z poprzedniego zadania.

   Wskazówka Sposób wyznaczania wektorów własnych jest omówiony w podręczniku Feynmana, Hibbsa w rozdziale 8-1. Przy wykonywaniu tego rachunku warto od razu używać wielkości przeskalowanych:

$$y = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x, \qquad \phi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\psi_n(y)\,.$$

Zapisanie funkcji trygonometrycznych w postaci kombinacji $e^{\pm i\omega T}$ pozwala na rozwinęcie K w szereg:

$$e^{-i\omega T/2}\left(a_0 + a_1 e^{-i\omega T} + a_2 e^{-i2\omega T}\ldots\right) .$$

4. Przypominam, o planowanej dyskusji obliczania całek po trajektoriach przy pomocy metody Metropolisa (na komputerze).