Mechanika Kwantowa
kurs dla doktorantów 26
23.5.2000

1. $C(f)$ jest wypukłą funkcją f na przedziale I gdy:

$$C(\mu f_1 + (1-\mu) f_2) \leq \mu\ C(f_1) + (1-\mu)\ C(f_2),$$

gdzie $f_1,\ f_2$ należą do I i $0 \leq \mu \leq 1$. Udowodnić podane na wykładzie twierdzenie:

$$C(< f >) \leq < C(f) > .$$

Średniowanie $< \cdots >$ definiujemy jako sumę z wagami $0 \leq \mu_i \leq 1$:

$$< a >= \sum_{i=1}^{N} \mu_i\ a_i,$$

gdzie $\sum_{i=1}^{N} \mu_i = 1$.

2. Zadanie analogiczne do wyliczenia x_{00}: dla oscylatora wymuszonego wylicyzyć ślad macierzy gęstości. Wygodnie jest przyjąć $\hbar = \omega = m = 1$. W tych oznaczeniach należy wykazać:

$$\mathrm{Tr}\rho(\beta) = \sqrt{\frac{1}{2(\cosh\beta - 1)}} \exp\left(\frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau \int_0^\beta d\sigma\ \frac{\gamma(\tau)\gamma(\sigma)}{1-e^{-\beta}} \left[e^{-|\tau-\sigma|} + e^{|\tau-\sigma|-\beta} \right] \right).$$

Jest to forma dogodna do wzięcia granicy $\beta \to \infty$. Pokazać, że jest ona równoważna:

$$\mathrm{Tr}\rho(\beta) = \sqrt{\frac{1}{2(\cosh\beta - 1)}} \exp\left(\frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau \int_0^\beta d\sigma\ \gamma(\tau)\gamma(\sigma) \frac{\cosh(|\tau-\sigma| - \frac{\beta}{2})}{\sinh\frac{\beta}{2}} \right).$$

W celu wyprowadzenia powyższych wzorów, skorzystać ze znanego wzoru na $K(x, x', T)$ dla oscylatora wymuszonego i zamienić w nim czas Minkowskiego $t \to -i\tau$. Następnie wykonać całkę po dx położywszy $x = x'$.