Mechanika Kwantowa
kurs dla doktorantów 23
19.4.2000

1. Dokończenie wyliczenia x_{00}. Na poprzednich ćwiczeniach otrzymaliśmy następujący wzór:

$$x_{00} = \exp \frac{\alpha}{\omega^2} \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^T dt\, f(t) \int_0^T ds\, f(s) \left[\cos\omega(T-s-t) - e^{-i\omega T} \cos\omega\,(t-s) \right] + 2\omega^2 B \right\},$$

gdzie nawias $\{\cdots\}$ jest sumą 2 całek:

$$\int_0^T dt\, f(t) \int_0^t ds\, f(s) \left[-\frac{1}{2} \cos\omega(T-s-t) + \frac{1}{2} e^{-i\omega T} \cos\omega\,(t-s) + \sin\omega\,(T-t) \sin\omega s \right],$$

$$\int_0^T dt\, f(t) \int_t^T ds\, f(s) \left[-\frac{1}{2} \cos\omega(T-s-t) + \frac{1}{2} e^{-i\omega T} \cos\omega\,(t-s) + \sin\omega\,(T-s) \sin\omega t \right].$$

Proszę doprowadzić rachunek do końca i wykazać, że:

$$x_{00} = \exp \left\{ -\frac{1}{4\omega\hbar} \int_0^T dt\, f(t) \int_0^T ds\, f(s) e^{-i\omega|s-t|} \right\}.$$

2. W rozdziale 9-4 podręcznika Feynmana Hibbsa dyskutuje się przejście układu *promieniowanie–atom* od stanu $|n,0\rangle$ (atom w n-tym stanie wzbudzonym, promieniowanie w stanie podstawowym) do stanu $\left|m,\vec{\sigma k}\right\rangle$ (atom w m-tym stanie wzbudzonym + 1 foton o pędzie $\vec{k}$ i polaryzacji $\vec{\sigma}$). Proszę wykazać, że częstość przejść zdefiniowana w rachunku zaburzeń jako $dP/dt = \left|\lambda_{m,n}^{\sigma k,0}\right|^2$ wyraża się wzorem

$$\frac{dP}{dt} = \frac{\omega}{2\pi\hbar c^3} \left| \left(j_{\vec{\sigma k}}\right)_{mn} \right|^2 d\Omega,$$

gdzie $\omega = kc$. Rachunek wykonuje się biorąc za zaburzenie S_{int} . $\left(j_{\vec{\sigma k}}\right)_{mn}$ jest elementem macierzowym składowej Fourierowskiej prądu między stanami $|n\rangle$ i $|m\rangle$.

3. Wyliczyć $\left(j_{\vec{\sigma k}}\right)_{mn}$ w tzw. przybliżeniu dipolowym, tzn. rozwijając $e^{-i\vec{k}\cdot\vec{q}}$ w składowej Fourierowskiej prądu w szereg. Oznaczając przez $\vec{\mu}_{mn} = \langle m|\, e\vec{q}\,|n\rangle$ pokazać, że

$$\frac{dP}{dt} = \frac{4\omega^3}{3\hbar c^3} \left|\vec{\mu}_{mn}\right|^2.$$

4. Przy wyprowadzaniu wzorów na przesunięcie Lamba korzystaliśmy z faktu, że potencjał Coulomba jest sferycznie symetryczny. Podobnie przy wyprowadzaniu wzoru z poprzedniego zadania należy skorzystać z własności

$$\int d\Omega\, r_i r_k = \frac{1}{3} r^2.$$

Proszę udowodnić tę własność. Wykazać

$$\begin{aligned} \partial_k f(r) &= n_k \frac{\partial f}{\partial r}, \\ \partial_k n_i &= \frac{1}{r}\left(\delta_{ki} - n_k n_i\right), \end{aligned}$$

gdzie $\vec{n}$ jest wektorem jednostkowym.