Mechanika Kwantowa

kurs dla doktorantów – 16 (1.3.2000)

1. Pokazać, że dla cząstki w 3 wymiarach:

$$< (x_{k+1} - x_k)^2 >=< (y_{k+1} - y_k)^2 >=< (z_{k+1} - z_k)^2 >= \frac{i\epsilon\hbar}{m},$$

$$< (x_{k+1}-x_k)(y_{k+1}-y_k) >=< (z_{k+1}-z_k)(y_{k+1}-y_k) >=< (x_{k+1}-x_k)(z_{k+1}-z_k) >= 0.$$

2. Wyprowadzić relację komutacji operatorów pędu i położenia wyliczając:

$$< \chi | m \frac{1}{\epsilon} \left((x_{k+1} - x_k)x_k - x_{k+1}(x_{k+1} - x_k) \right) | \psi > .$$

3. Pokazać, że dla oscylatora harmonicznego zachodzą związki:

$$\begin{aligned} < x(t) > &= \overline{x}(t) < 1 > \\ < x(t)x(s) > &= [\overline{x}(t)\overline{x}(s) + g(s,t)] < 1 > \\ < x(t)x(s)x(u) > &= [\overline{x}(t)\overline{x}(s)\overline{x}(u) + \overline{x}(t)g(s,u) + \overline{x}(s)g(t,u) + \overline{x}(u)g(t,s)] < 1 > \end{aligned}$$

gdzie $\overline{x}(t)$ jest klasyczną trajektorią, a $g(t,s)$ dane jest wzorem:

$$g(t,s) = \frac{i\hbar}{m\omega \sin \omega T} \sin \omega(t_2 - t) \sin \omega(s - t_1), s < t$$

$$g(t,s) = \frac{i\hbar}{m\omega \sin \omega T} \sin \omega(t_2 - s) \sin \omega(t - t_1), t < s.$$

Wskazówka: Podstawić do wzoru:

$$\left\langle \exp \frac{i}{\hbar} \int dt f(t)x(t) \right\rangle_S = \exp \frac{i}{\hbar}(S'_{cl} - S_{cl}) < 1 >_S$$

znane wyrażenia na działanie dla oscylatora bez wymuszenia (S_{cl}) i z wymuszeniem $f(t)$ (S'_{cl}). Wypisując różnicę przekonać się, że:

$$S'_{cl} - S_{cl} = \frac{i}{2\hbar} \int \int f(t)f(s)g(t,s)dtds + \int f(t)\overline{x}(t)dt.$$

Różniczkując ten wzór ze względu na f otrzymujemy kolejno wzory, o które chodzi w zadaniu.